

## Modelando la dinámica de un cantiléver de Microscopia de Fuerza Atómica AFM

Matamoros, J.<sup>1</sup>, Vega-Baudrit, J.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Laboratorio Nacional de Nanotecnología LANOTEC, Centro Nacional de Alta Tecnología, San José, Costa Rica. <sup>2</sup>Laboratorio de Polímeros POLIUNA, Escuela de Química, Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia, Costa Rica.  
josuematomorosq@gmail.com

### Resumen

Parte de la investigación científica actual involucra el empleo de diversas herramientas computacionales, tanto teóricas como de experimentación. La simulación computacional puede brindar acercamientos valiosos a la resolución de problemas científicos. La microscopía de fuerza atómica (AFM) constituye una de las técnicas de microscopía de sonda local; busca escanear las fuerzas interatómicas que pueden establecerse entre una muestra y una sonda. El movimiento oscilatorio del cantiléver se puede modelar matemáticamente utilizando los primeros armónicos de la ecuación de un oscilador armónico forzado con amortiguamiento. El hecho de que sea posible modelar matemáticamente permite que ambos comportamientos puedan ser programados y computados para la predicción del comportamiento físico a nivel teórico.

Palabras clave: Simulación, dinámica, cantiléver, AFM.

### Abstract

Currently some research involves computing, as well as experiment. On the other hand, computer simulation can provide valuable approaches to scientific problems. The atomic force microscopy (AFM) is one of the scanning probe microscopy techniques, which locally scans interatomic forces between a sample and a probe. The oscillatory motion of the cantilever can be simulated mathematically using a forced damped harmonic oscillator model. The fact that it is possible to mathematically approach the behaviour of the cantilever-sample system, allows them to be programmed and computed to predict the physical behavior at a theoretical level.

Keywords: Simulation, dynamics, cantilever, AFM.

## Introducción

En AFM se hace oscilar la sonda con una frecuencia y amplitud determinadas; luego, por medio de un sistema electrónico de sensores y retroalimentación, se mide la manera en que la interacción con la muestra afecta el movimiento oscilatorio. La frecuencia de resonancia, el desfase y la amplitud de la oscilación enlazan la dinámica de la vibración de la sonda con las interacciones entre muestra y sonda. Todos estos parámetros han sido utilizados como variable de retroalimentación. Uno de los modos dinámicos más conocidos es el AFM de amplitud modulada (AM-AFM). El AM-AFM o modo de contacto excita el cantiléver a su frecuencia de resonancia libre y la amplitud de la oscilación se utiliza como la variable de retroalimentación para medir la topografía de la superficie de la muestra. La componente de la interacción entre sonda y muestra se puede modelar mediante las ecuaciones de mecánica de contacto.

Desde la invención del AFM (Binnig, 1998), se ha acumulado mucho trabajo respecto a la metodología y teorización, buscando obtener más provecho de esta herramienta. En la publicación “High-Q Dynamic Force Microscopy” presentan una técnica de microscopía de fuerza dinámica con la intención de generar imágenes en líquidos. La técnica consistía, a grandes rasgos, en aumentar el valor del factor de calidad del cantiléver en tres órdenes de magnitud. El artículo reporta simulaciones computacionales que muestran que la fuerza de interacción entre la punta del cantiléver y la muestra disminuye en dos órdenes de magnitud debido a la modificación hecha al factor de calidad del cantiléver. “Dynamic AFM using the FM technique with constant excitation amplitude”, corresponde a la primera vez en que se propone controlar el comportamiento del cantiléver modulando la frecuencia y

manteniendo la amplitud de la oscilación constante. Los autores apoyan su propuesta mediante simulación computacional. El artículo muestra la relación entre distancia de la frecuencia y amplitud, e infiere que las dos variables medidas se comportan debido a aportes tanto conservativos como disipativos.

Tal vez una de las publicaciones que ha obtenido estatus clásico corresponde a “Dynamic atomic force microscopy methods” (García y Perez, 2002). Este artículo de revisión resume la extensa teoría que involucra la dinámica vibracional de un cantiléver con excitación senoidal y en interacción con una superficie. Esta interacción dota a esta dinámica de un carácter no lineal que los autores exploran de manera exhaustiva basados en el trabajo de sus colegas. El artículo se divide básicamente en dos grandes partes corresponden a modulación de amplitud y modulación de frecuencia. Los autores enfatizan en la independencia física de los fenómenos que se obtienen al utilizar las técnicas de modulación lo que ha generado dos comunidades científicas distintas. El artículo detalla aspectos físicos como la mecánica de contacto y los modelos de diferente complejidad que se utilizan para aproximar la interacción entre la punta del cantiléver y la muestra. Es esta interacción la que determina el comportamiento intrínsecamente no lineal de la microscopía de fuerza atómica, generando el fenómeno que el artículo menciona como bifurcación; el cantiléver tiene dos maneras distintas de comportarse según la separación entre punta y superficie y depende de las distintas fuerzas de interacción que estén presentes. Por otro lado, el artículo hace hincapié en un fenómeno que permite la identificación de la presencia de materiales en debido a cambios en frecuencia usando la técnica de modulación de amplitud.

Esta revisión aumentó el interés por la investigación teórica de la dinámica del cantiléver y ha dado origen a la búsqueda de soluciones y a la mejoría de la construcción e implementación de instrumentos de microscopía y espectroscopía.

### Modelo básico

Para simular el movimiento de la punta del cantiléver con amplitud modulada se utiliza una ecuación diferencial de segundo orden no lineal. Corresponde al modelo matemático de un oscilador armónico forzado con amortiguamiento.

$$m \frac{\delta^2 z}{\delta t^2} + kz + \frac{m\omega_0}{Q} \frac{\delta z}{\delta t} = F_{ts} + F_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

En la ecuación,  $m$  es la masa del cantiléver simplificado en una masa puntual,  $z$  es la posición de la punta del cantiléver respecto a la posición de equilibrio,  $k$  es la constante de fuerza del cantiléver en oscilación libre,  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia angular,  $Q$  es el factor de calidad,  $F_{ts}$  son las fuerzas de interacción entre la superficie y la punta del cantiléver,  $F_0$  es la amplitud y  $\omega$  la frecuencia angular de la onda de excitación. Esta onda de excitación caracteriza al oscilador como forzado y corresponde al impulso externo que hace vibrar al cantiléver.

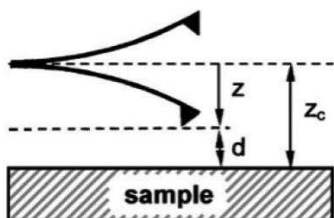


Figura 1: Esquema de las distancias relevantes del sistema cantiléver-superficie en García y Perez (2002)

La ecuación se debe aproximar mediante un método de integración numérica, por ejemplo Runge Kutta. Además se debe actualizar el valor de  $F_{ts}$  en cada paso de integración de acuerdo con algún modelo de fuerzas de interacción. Una opción es utilizar dos ecuaciones distintas para calcular el valor de  $F_{ts}$  dependiendo de la distancia de la punta del cantiléver respecto a la muestra. Si esta distancia es menor  $a_0$  que las fuerzas de interacción  $F_{ts}$  obtendrían su valor siguiendo la ecuación:

$$F_{ts}(z_c, z) = \frac{4E_{efectivo}\sqrt{R}}{3 - 3\nu_s^2} (a_0 - z - z_c)^{\frac{3}{2}} - \frac{HR}{6d^2} \quad (2)$$

En la ecuación (2),  $E_{efectivo}$  es el módulo de elasticidad efectivo,  $R$  es el radio de la punta del cantiléver,  $a_0$  es la mínima distancia entre el centro de los átomos de la punta del AFM y los átomos de la muestra,  $z_c$  es la distancia de la punta del cantiléver a la muestra cuando el cantiléver está en posición de equilibrio, y  $\nu_s$  es la constante de Poisson de la muestra,  $d$  corresponde a la posición instantánea de la punta del cantiléver respecto a la muestra,  $H$  es la constante de Hamaker.

El  $E_{efectivo}$  se calcula con la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{E_{efectivo}} = \frac{1 - \nu_t^2}{E_t} + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \quad (3)$$

Donde  $\nu_t$  es la constante de Poisson de la punta del cantiléver,  $E_t$  y  $E_s$  son los módulos de elasticidad de la punta del cantiléver y de la muestra.

En el caso de que la distancia sea mayor a  $a_0$  se utiliza las fuerzas de interacción entre

punta y muestra se calculan con siguiente ecuación:

$$F_{ts}(z_c, z) = -\frac{HR}{6d^2} \quad (4)$$

Para este caso se asumen valores típicos de una muestra polimérica. Se elige el módulo de elasticidad  $E_s = 1 \text{ GPa}$  y una constante de Poisson  $\nu_s = 0.4$ . El módulo de elasticidad de la punta del cantiléver se le da un valor  $E_t = 130 \text{ GPa}$  y una constante de Poisson  $\nu_t = 0.1$ . La constante de fuerza de cantiléver se puede fijar en un valor típico  $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ , la frecuencia natural  $f_0 = 70 \text{ kHz}$ , en y el factor de calidad  $Q = 150$ . De igual manera se eligen valores realistas para la amplitud y frecuencia de excitación, y las dimensiones de la punta del cantiléver.

La idea es generar graficas que comparen la amplitud de oscilación con la variación de la separación entre la superficie de la muestra y la punta. Para esto se selecciona una amplitud para el cantiléver cercana a  $A = 50 \text{ nm}$ . Se elige una posición para el cantiléver de unos respecto a la superficie de la muestra. Se integra la ecuación del movimiento oscilatorio armónico y se mide la amplitud de la oscilación. Se reduce gradualmente la posición del cantiléver respecto a la muestra y se mide la amplitud de oscilación. Finalmente se construye la gráfica de la oscilación contra la distancia de la punta en equilibrio respecto a la muestra.

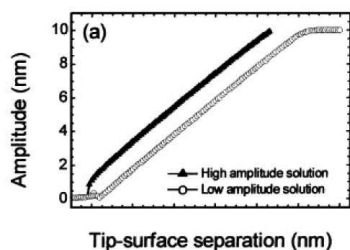


Figura 2 :Comportamiento de la amplitud de la oscilación comparada con la separación de la superficie y la punta en García y Perez (2002)

## 2. Análisis computacional

El artículo “Analytical solutions of the first three frequency shifts of AFM (...)” (Shueer-Muh Lin, 2006) propone un método para determinar el cambio de frecuencia tomando en cuenta las fuerzas de interacción y utiliza el modelo Lennard-Jones. El autor realiza simulaciones y muestra como la amplitud y la distancia punta-muestra disminuyen al aumentar el cambio en frecuencia. Evidencia también como los cambios en frecuencia contribuyen más a las oscilaciones en primer orden que en órdenes superiores. Con un cantiléver de mayor frecuencia de oscilación natural o bien con constante de resorte menor, el cambio de frecuencia en oscilaciones de primer orden aumenta. También emite conclusiones acerca de la alta rigidez necesaria para repeler perturbaciones externas. En otra publicación proponen obtener el cambio de frecuencia de una sonda en forma de V cercana a una superficie inclinada (Shueei-Muh Lin, Lee, y Chen, 2006). Propone un modelo analítico y lo compara con otros dos: gradiente de fuerza y perturbación. Los autores obtuvieron mayores cambios en frecuencia cuando la amplitud de oscilación como y distancia punta-muestra disminuyen. También descubrieron aspectos que aumentan la magnitud del cambio en frecuencia como el uso de un cantiléver cónico y no en forma de V, el incremento del grosor en la base del cantiléver y el radio de la punta. Por otro lado, el aumento del ángulo de inclinación disminuye el valor del cambio en frecuencia. En otro trabajo analítico, los autores buscan la relación entre cambio de frecuencia en diferentes órdenes de magnitud y un ángulo de oscilación (Shueei-Muh Lin, Liauh, Wang, y Ho, 2007). El artículo muestra que tanto la dirección como magnitud de las inclinaciones afectan los cambios en frecuencia. Nuevamente, la amplitud y la distancia punta-muestra influyen más significativamente en la oscilación

fundamental que en órdenes superiores de oscilación. En otra publicación (Shueei-Muh Lin y Lin, 2009) los autores miden los errores que se pueden dar por disipación de energía. Acotan que aumentar el cambio en frecuencia podría ayudar a disminuir los errores relacionados con la compensación de la tensión en corriente directa. En “Frequency shifts and analysis of AFM accompanying with coupled flexural–torsional motions” (Shueei-Muh Lin y Wang, 2009) establecen un modelo analítico del sistema del cantiléver y muestran cómo los primeros dos órdenes de oscilación se relacionan con el movimiento de flexión y el tercer orden incluye componentes de torsión. Los autores observan cómo afecta la distancia de la base a la punta del cantiléver y cómo influencia valor de la constante Hamaker en los cambios en frecuencia cuando las oscilaciones son de amplitudes pequeñas.

En Solares (2007) el autor propone un tipo de modulación en frecuencia y en amplitud que busca eliminar el fenómeno de biestabilidad y reducir las fuerzas de interacción entre sonda y muestra. Describe el modelo teórico aplicándolo de manera virtual en una molécula de bacteriorodopsina. John Melcher y colegas estudian cómo flujos de energía espontáneos en muestras líquidas originan contrastes de fase Melcher *et al.* (2009). “Theory of amplitude modulation atomic force microscopy with and without Q-Control” Hölscher y Schwarz (2007) revisan los fundamentos de microscopía de amplitud modulada. Muestra la teoría analítica de AM-AFM y compara mediante simulaciones numéricas las ecuaciones de los modelos. Expone una manera de suprimir el comportamiento biestable en AM-AFM: Mueve el cantiléver en su frecuencia de resonancia, incrementa el factor de calidad y restringe las fuerza punta-muestra a la región atractiva y de no contacto. Además

demuestra que la deformación elástica de la muestra se puede evitar.

El artículo “Cantilever dynamics in atomic force microscopy” (Raman; Melcher y Tung, 2008) se revisa la dinámica de AM-AFM y las posibilidades que se obtienen de su simulación computacional. Los autores aseveran que existen muchas posibilidades de avanzar en la comprensión e implementación de la dinámica de cantiléver y el desarrollo de nueva instrumentación.

El artículo “Effects of higher oscillation modes on TM-AFM measurements” (Pishkenari y Meghdari, 2011) utiliza tanto dinámica molecular como el método de elementos finitos para modelar la interacción de la punta de un microcantiléver con una muestra. Los autores observan las deformaciones elásticas ocasionadas por el cantiléver en la muestra y aseguran que modelar la punta del cantiléver como una masa puntual evita observar aspectos relevantes de la dinámica.

“Dynamic analysis of tapping-mode AFM considering capillary force interactions” (Korayem; Kavousi y Ebrahimi, 2011) explora simulaciones numéricas de un sistema cantiléver-superficie. Además incluye interacción con capas de fluidos capilares. Los autores exponen diagramas de amplitud y fase contra separación muestra-punta, obteniendo luego el valor mínimo de separación. El artículo acota que cuando la punta se acerca a la distancia en que se activa la fuerza capilar, la oscilación puede volverse caótica. En ambientes poco húmedos la oscilación en la rama de baja amplitud crece, y por otro lado la humedad no parece afectar la oscilación en la rama de amplitud alta.

“Sensitivity and resonant frequency of an AFM with sidewall and top-surface probes (...)”

(Kahrobaiyan; Ahmadian; Haghighi y Haghighi, 2010) examina las sensibilidades a frecuencia de resonancia en flexión y en torsión de un cantiléver. Los autores deducen que los modos de orden inferior son más sensitivos a valores de baja rigidez de contacto, y la situación es inversa para valores altos. Además el artículo compara los valores de sensibilidad a diferentes órdenes tomando en cuenta modificaciones en las dimensiones del cantiléver. En Gómez y Garcia (2010) se detalla un método para identificar disipación de energía a nanoescala. Se calcula la curva de disipación para la energía de adhesión a la muestra, interacciones de alto alcance y procesos visco-elásticos. Las curvas son una combinación de los diferentes procesos combinados.

En Wang y Yau (2011) los redactores emplean la transformación diferencial para considerar el fenómeno caótico y de bifurcación en un cantiléver. El artículo compara los resultados de desplazamiento y velocidad a diferentes valores de amplitud con las obtenidas por Runge-Kutta, además distingue que el comportamiento dinámico depende de la amplitud de oscilación pasando por distintos tipos de movimiento: subarmónico, caótico y multiperiodico. En Pai, Wang, y Lin (2010) se examina la dinámica del cantiléver también mediante transformación diferencial. Los autores presentan diagramas de bifurcación, retratos de fase, espectros de potencia, mapas de Poicaré, y el ploteo de los máximos exponentes de Lyapunov. Corroboran también la dependencia de la dinámica con los valores de amplitud pasando por diferentes tipos de movimiento: caótico, multiperiodico, oscilación fundamental y de órdenes superiores.

En Kahrobaiyan; Ahmadian; Haghighi y Haghighi (2010) se descompone la dinámica de un cantiléver en forma de  $V$  tanto en amplitud como en frecuencia modulada. En Schwartz *et*

*al.* (2011) los autores estudian las reacciones dieléctricas a nanoescala en capas de polímero utilizando microscopía de fuerza electrostática. En Eslami y Jalili (2012) se modela un sistema AFM mediante parámetros distribuidos y se confronta la inercia rotacional y su característica esfuerzo deformación con el modelo Euler-Bernoulli.

En los responsables plantean un controlador de deslizamiento robusto para incrustar nanopartículas en sustratos. Se describen las limitaciones de la modulación de amplitud. Los autores enseñan una forma de obtener las fuerzas Van der Waals utilizando curvas de distancia-fase. Se especifican los procesos dinámicos de dos escenarios experimentales: aspereza singular y múltiple. En los redactores explican un proceso de mecanizado empleando un cantiléver de AFM. La fuerza entre punta-muestra compone un rasgo que determina el resultado de una mecanización y la amplitud se destina a parámetro de control de la profundidad del mecanizado.

## Conclusiones

El modelado de las condiciones físicas que gobiernan la dinámica del cantiléver en fuerza atómica puede ser un medio útil de ganar una mejor percepción de su funcionamiento. La comprensión de estos aspectos teóricos podría llevar a una mejoría general de la técnica de AFM. En casos específicos, el mayor conocimiento del sistema conjunto de muestra y cantiléver puede provocar una mejor utilización de las herramientas de visualización y así mejores estudios por medio de AFM. En el Laboratorio Nacional de Nanotecnología es usual la obtención de imágenes de microscopía de sonda. La comparación con modelos teóricos puede resultar en una invaluable fuente para la mejoría de los estudios y mediciones de microscopía.

## Referencias

- Barcons, V., Verdaguer, A., Font, J., Chiesa, M., & Santos, S. (2012). Nanoscale Capillary Interactions in Dynamic Atomic Force Microscopy. *The Journal of Physical Chemistry C*, 116(14), 7757-7766. doi: 10.1021/jp2107395
- Binning, G. (1988). Atomic force microscope and method for imaging surfaces with atomic resolution.
- Eslami, S., & Jalili, N. (2012). A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces. *Ultramicroscopy*, 117, 31-45. doi: 10.1016/j.ultramic.2012.03.016
- Eves, B. J., & Green, R. G. (2012). Limitations on accurate shape determination using amplitude modulation atomic force microscopy. *Ultramicroscopy*, 115, 14-20. doi: 10.1016/j.ultramic.2012.01.016
- García, R., & Perez, R. (2002). Dynamic atomic force microscopy methods. *Surface Science Reports*, 47.
- Gómez, C. J., & Garcia, R. (2010). Determination and simulation of nanoscale energy dissipation processes in amplitude modulation AFM. *Ultramicroscopy*, 110(6), 626-633. doi: 10.1016/j.ultramic.2010.02.023
- Gotsmann, B., & Fuchs, H. (2002). Dynamic AFM using the FM technique with constant excitation amplitude. *Applied Surface Science*, 188(3-4), 355-362. doi: 10.1016/S0169-4332(01)00950-3
- Hölscher, H., & Schwarz, U. D. (2007). Theory of amplitude modulation atomic force microscopy with and without Q-Control. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(4), 608-625. doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2007.01.018
- Kahrobaiyan, M. H., Ahmadian, M. T., Haghghi, P., & Haghghi, a. (2010). Sensitivity and resonant frequency of an AFM with sidewall and top-surface probes for both flexural and torsional modes. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(10), 1357-1365. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2010.06.013
- Kahrobaiyan, M. H., Rahaeifard, M., & Ahmadian, M. T. (2011). Nonlinear dynamic analysis of a V-shaped microcantilever of an atomic force microscope. *Applied Mathematical Modelling*, 35(12), 5903-5919. doi: 10.1016/j.apm.2011.05.039
- Korayem, M. H., Kavousi, a., & Ebrahimi, N. (2011). Dynamic analysis of tapping-mode AFM considering capillary force interactions. *Scientia Iranica*, 18(1), 121-129. doi: 10.1016/j.scient.2011.03.014
- Korayem, M. H., Noroozi, M., & Daeinabi, K. (2012). Control of an atomic force microscopy probe during nano-manipulation via the sliding mode method. *Scientia Iranica*, 19(5), 1346-1353. doi: 10.1016/j.scient.2012.06.026
- Lin, S.-M. (2006). Analytical solutions of the first three frequency shifts of AFM.
- Lin, S.-M., Lee, S.-Y., & Chen, B.-S. (2006). Closed-form solutions for the frequency shift of V-shaped probes scanning an inclined surface. *Applied Surface Science*, 252(18), 6249-6259. doi: 10.1016/j.apsusc.2005.08.027

- Lin, S.-M., Liauh, C.-T., Wang, W.-R., & Ho, S.-H. (2007). Analytical solutions of the frequency shifts of several modes in AFM scanning an inclined surface, subjected to the Lennard-Jones force. *International Journal of Solids and Structures*, *44*(3-4), 799-810. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2006.05.024
- Lin, S.-M., & Lin, C.-C. (2009). Phase shifts and energy dissipations of several modes of AFM: Minimizing topography and dissipation measurement errors. *Precision Engineering*, *33*(4), 371-377. doi: 10.1016/j.precisioneng.2008.10.005
- Lin, S.-M., & Wang, W.-R. (2009). Frequency shifts and analysis of AFM accompanying with coupled flexural-torsional motions. *International Journal of Solids and Structures*, *46*(24), 4231-4241. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2009.08.016
- Liu, W., Yan, Y., Hu, Z., Zhao, X., Yan, J., & Dong, S. (2012). Study on the nano machining process with a vibrating AFM tip on the polymer surface. *Applied Surface Science*, *258*(7), 2620-2626. doi: 10.1016/j.apsusc.2011.10.107
- Melcher, J., Carrasco, C., Xu, X., Carrascosa, J. L., Gómez-Herrero, J., José de Pablo, P., & Raman, A. (2009). Origins of phase contrast in the atomic force microscope in liquids. *Proc Natl Acad Sci U S A*, *106*(33), 13655-13660. doi: 10.1073/pnas.0902240106
- Pai, N.-S., Wang, C.-C., & Lin, D. T. W. (2010). Bifurcation analysis of a microcantilever in AFM system. *Journal of the Franklin Institute*, *347*(7), 1353-1367. doi: 10.1016/j.jfranklin.2010.06.008
- Pishkenari, H. N., & Meghdari, A. (2011). Effects of higher oscillation modes on TM-AFM measurements. *Ultramicroscopy*, *111*(2), 107-116. doi: 10.1016/j.ultramic.2010.10.015
- Raman, A., Melcher, J., & Tung, R. (2008). Cantilever dynamics in atomic force microscopy Dynamic atomic force microscopy, in essence, consists of a vibrating. *3*(1), 20-27.
- Raul D. Rodriguez, E. L., Jaques Jupille. (2012). Probing the probe AFM tip-pro•ling via nanotemplates to determine.pdf.
- Schwartz, G. a., Riedel, C., Arinero, R., Tordjeman, P., Alegría, a., & Colmenero, J. (2011). Broadband nanodielectric spectroscopy by means of amplitude modulation electrostatic force microscopy (AM-EFM). *Ultramicroscopy*, *111*(8), 1366-1369. doi: 10.1016/j.ultramic.2011.05.001
- Solares, S. D. (2007). Single biomolecule imaging with frequency and force modulation in tapping-mode atomic force microscopy. *The journal of physical chemistry. B*, *111*(9), 2125-2129. doi: 10.1021/jp070067+
- Tamayo, J., Humphris, a. D., Owen, R. J., & Miles, M. J. (2001). High-Q dynamic force microscopy in liquid and its application to living cells. *Biophysical journal*, *81*(1), 526-537. doi: 10.1016/s0006-3495(01)75719-0
- Wang, C.-C., & Yau, H.-T. (2011). Application of the differential transformation method to bifurcation and chaotic analysis of an AFM probe tip. *Computers & Mathematics with Applications*, *61*(8), 1957-1962. doi: 10.1016/j.camwa.2010.08.019