BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

Recibido: abril 2019 Recibido: mayo 2019

Miguel Ángel Echeverría[1]

Comentarios en el pórtico: saludos para los anfitriones

Hubo un tiempo en el que la matemática no era más que un pasatiempo. Era un pasatiempo, eso sí, muy prestigioso y digno de una admiración general. Era un tiempo en el que reinaba soberana sobre las matemáticas la Geometría y a sus pies estaban todos. Filósofos, poetas, pintores, reyes, todos eran bienvenidos a medirse en una competencia de ingenio con un compás y una regla. Hubo un tiempo —cada vez es más difícil de creer— en el que la matemática era simplemente una diversión y no trataba de ser más útil que un juego de pelota. El problema era cómo hacer un cuadrado que tuviera la misma área que un círculo, el problema era cómo hacer para dividir un ángulo en tres ángulos iguales. El problema era plantear un problema que quizás ni siquiera tuviera solución pero que diera horas de entretenimiento incluso a las generaciones posteriores.

Testigos de esa época son los textos de los antiguos que —¡vaya si no!— se entretuvieron por unos cuantos siglos intercambiándose problemas. De manera similar a nuestro actual sistema de citas y referencias, en esa época mantenían la costumbre hacer comentarios a los trabajos de otros. El estilo no era hacer citas oscuras (ni triviales) y se comentaban los trabajos con el explícito fin de comprenderlos. Lejos también de la ahora común práctica de enredarlo todo para quitarle la gracia y hacerlo pasar por un arte oculto, la matemática se escribía en palabras que aspiraban a ser comprensibles. Eutocio comentaba los trabajos de Apolonio, Apolonio comentaba los trabajos de Tolomeo, Proclo comentaba los trabajos de Pappus, Pappus comentaba los trabajos de Euclides. Unos corregían a otros y otros reescribían a otros. Apolonio corregía a todos y reescribía a Euclides, Euclides reescribía a Pitágoras. Pitágoras, él sí hacía lo posible por dejar todo envuelto en un aire místico que no permitiera la fácil comprensión… Pero todos, absolutamente todos, seguramente pasaron horas y horas jugando al geómetra, muy entretenidos con una regla y un compás. Euclides resolvió 13 libros de geometría con regla y compás pero lejos de darle fin al juego, terminó por extenderlo aún más al abrir la posibilidad de hacer nuevas reglas. A alguien se le ocurrió luego volver a resolverlos con una regla y un compás que solamente podía usarse una vez; a alguien se le ocurrió también resolverlos con un compás y una regla que sólo podía usarse una vez. Más de alguien intentó resolverlo sólo con un compás o sólo con una regla (o sólo con una mano o parado en un solo pie). A alguien se le ocurrió resolver todo lo que pudiera de los 13 libros sin usar el quinto postulado. A alguien se le ocurrió

[1] Parte del problema que aquí se presenta y la solución que aquí se da fueron propuestos como uno de los problemas originales para la Olimpiada Interuniversitaria de 2011. El problema no llegó a figurar entre los problemas del examen y no se presentó ante un público sino en una plática de tono muy relajado con un grupo de estudiantes. En una gran medida, el texto de dicha plática —casi en el mismo tono—, revisado, ordenado y corregido, es lo que aquí se recoge. Las gráficas que lo ilustran, que originalmente eran construcciones animadas, fueron hechas con GeoGebra y Scientific Notebook

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

luego volver a resolverlos con un quinto postulado diferente y hasta contradictorio. Alguien ideó un sistema de coordenadas para la geometría y alguien ideó una forma de usar la teoría de conjuntos para revolver y revivir la ya cansada geometría.

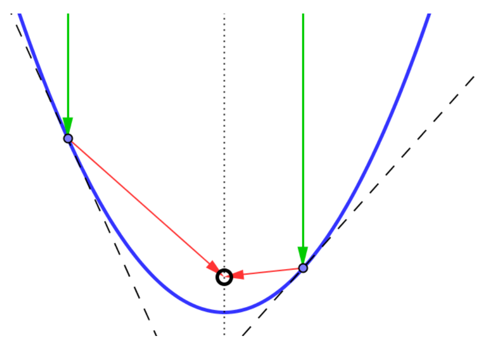
Pensándolo bien, esa época de la que hablábamos quizás no está tan sumida en el pasado como parecía. El juego de la matemática y de la geometría se hizo más sofisticado con el tiempo, pero quizás nunca dejó de tener ese espíritu lúdico. Nunca dejó de tener ese espíritu de quien, así como nosotros, se plantea algo

como “y si ahora tratáramos de conseguir este resultado por este otro camino…”

Entrada: focos con parábolas acompañadas de reflexiones (no muy profundas)

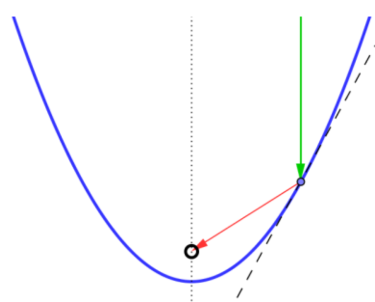
Para comenzar, una vieja y conocida propiedad de las parábolas que Apolonio —probablemente reescribiendo a Euclides— describió, quizás por primera vez, en el siglo III:

Todos los rayos paralelos al eje de simetría de una parábola que se reflejen al entrar en contacto con ella se van a encontrar en el foco de dicha parábola.



parábola ilustrando la independencia del punto de contacto

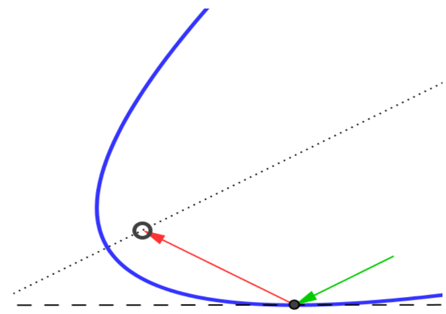
Fijemos la atención, para una mayor simplicidad, solamente en un punto y veamos cómo se podría hacer la transformación geométrica que llevaría el rayo incidente (verde) al rayo reflejado (rojo).



Vector incidente (verde), vector reflejado (rojo).

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

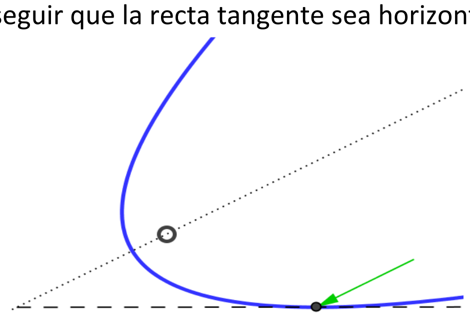
Saltemos unos cuantos siglos y comencemos con un vector, esa gran novedad del siglo XIX, de tamaño arbitrario y veámoslo desde un ángulo diferente. Hagamos girar todo el dibujo hasta lograr que la recta tangente sea horizontal.



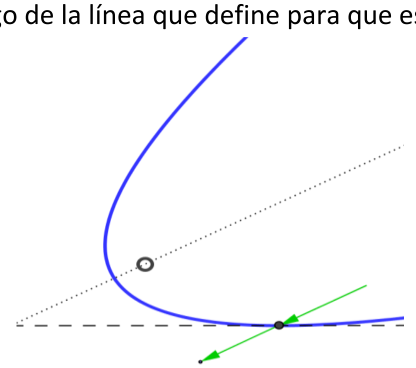
parábola rotada

La transformación del vector ahora se ve más fácil y la propiedad fundamental se puede reducir a una sencilla sucesión de transformaciones geométricas que no recurren a ejes inclinados. Debemos admitir, definitivamente, que Descartes, para bien o para mal, realmente cambió nuestra forma de pensar. Paso por paso:

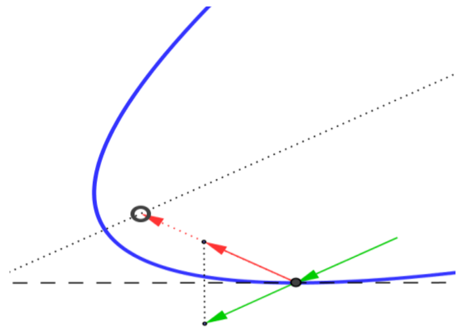
1. Girar la figura hasta conseguir que la recta tangente sea horizontal.



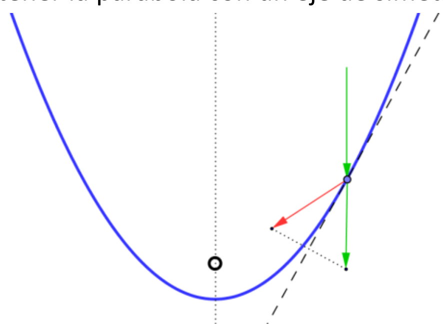
2. Trasladar el vector a lo largo de la línea que define para que esté debajo de la horizontal.



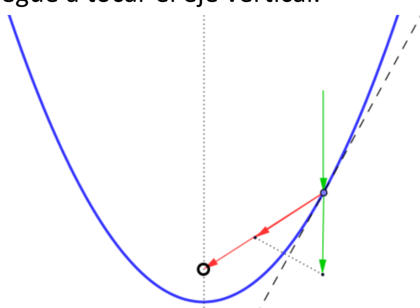
3. Reflejar el vector a través de la horizontal. (Nótese que al comenzar con un vector de tamaño arbitrario no se puede garantizar que la reflexión del vector sea del tamaño necesario para localizar el foco).



4. Girar de regreso para volver a tener la parábola con un eje de simetría vertical.



5. Estirar el vector hasta que llegue a tocar el eje vertical.



Lograr una demostración ahora sería comprobar que cualquier vector inicial llegaría al exacto mismo punto. Veamos entonces, como decíamos al principio, qué pasaría si tratáramos de hacer una demostración en términos vectoriales y matriciales. Veamos cómo se miraría este procedimiento que acabamos de esbozar en términos de transformaciones matriciales aplicadas a vectores. Comienza el juego y comencemos nosotros por la ecuación general de esta parábola $y = Ax^2$; sea entonces $p = \begin{bmatrix} x_0 \\ Ax_0^2 \end{bmatrix}$ y sea $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ el vector incidente en dicho punto. Paso por paso, nuestro procedimiento se miraría así:

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

1. Girar el vector incidente hasta conseguir que la recta tangente sea horizontal significa hacer una transformación de rotación a través de un ángulo $\theta = \tan^{-1}\frac{\mathrm{dy(x_0)}}{\mathrm{dx}} = \tan^{-1}(2Ax_0)$ en la dirección negativa.
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$$

2. Trasladar el vector a lo largo de la línea que lo define para que esté debajo de la horizontal significa aplicar la transformación identidad. Las coordenadas de un vector son invariantes ante traslaciones.

3. Reflejar el vector a través de la horizontal significa cambiar el signo de la segunda componente del vector.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

4. Girar de regreso para volver a tener la parábola con un eje de simetría vertical significa regresar la rotación que se hizo en el paso 1.
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

5. Estirar el vector hasta que llegue a tocar el eje vertical significa resolver el punto en el cual la primera componente de la recta definida por el punto p y la dirección que se acaba de calcular se anula.
$$\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ Ax_0^2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

La solución es $t = \frac{x_0}{\sin 2\theta}$ y el punto que le corresponde sería
$$\begin{bmatrix} x_0 \\ Ax_0^2 \end{bmatrix} + \frac{x_0}{\sin 2\theta}\begin{bmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ax_0^2 + x_0\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \end{bmatrix}$$

Esto se puede simplificar por medio de la identidad trigonométrica $\cot 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ y el hecho de que $\tan\theta = \frac{\mathrm{dy(x_0)}}{\mathrm{dx}} = 2Ax_0$, para obtener
$$\begin{bmatrix} 0 \\ Ax_0^2 + x_0\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ax_0^2 + x_0\dfrac{1-(2Ax_0^2)^2}{2(2Ax_0^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{4\mathrm{A}} \end{bmatrix}$$

El resultado, como cualquiera habría anticipado, es independiente del punto inicial: todos los rayos reflejados van a pasar por ese mismo punto que todos conocemos como el foco de la parábola.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

El juego, aún en este momento, no ha dejado de ser interesante, educativo y recreativo: usar geometría vectorial del siglo XIX y gráficas generadas por una computadora trabajando con software del siglo XXI para resolver un problema que *El Gran Geómetra*, Apolonio de Perga, ya había resuelto hace 18 siglos. No hay ningún error de juicio en saltar entre siglos; no es una trampa ni una falacia: es sólo un juego. Si éste es ahora el juego y estas son las reglas —geometría vectorial y una computadora que sustituye al viejo compás y lo extiende a una tercera dimensión— veamos qué posibilidades tenemos para pasar un buen rato.

Plato fuerte: paraboloide à l'elliptique

Para un paraboloide circular, esta propiedad que acabamos de demostrar se generaliza trivialmente. La sección de un paraboloide circular que se obtiene al cortarlo con un plano que incluya a su eje de simetría es siempre la misma y por lo tanto el foco de todas las parábolas de las secciones siempre va a coincidir. Final del juego.

Ahora bien, como esta superficie no tiene interés, veamos si hay algún interés en un simple cambio de escala en alguno de los ejes para obligar a que las reflexiones se desvíen, veamos entonces el mismo problema, pero en un paraboloide elíptico. Demos primero las condiciones de los objetos involucrados en el juego:

> *Sea p un punto sobre la superficie que describe la ecuación $z = ax^2 + by^2$ ($a \neq b$); sea l una recta paralela al $eje-z$ que pasa por dicho punto; sea l^* la reflexión de l respecto a la superficie anterior en el mismo punto p.*

Y demos ahora el enunciado del problema:

> *El lugar geométrico que describe la intersección de l^* con el plano $y = 0$ a medida que p recorre la curva dada por la restricción $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ es un segmento parabólico cuyo foco coincide con él la parábola $z = ax^2$ en el plano $y = 0$.*

Antes de continuar, veamos dónde se encuentra la curva $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$, veamos qué restricción representa en el paraboloide $z = ax^2 + by^2$ en una gráfica. Primero en una vista plana, en el conocido mundo de dos dimensiones. La restricción tiene una relación importante con el propio paraboloide. La curva de nivel de $ax^2 + by^2$ en $z = 1$ es una elipse que tiene como semiejes a las raíces de los inversos de los coeficientes del polinomio.

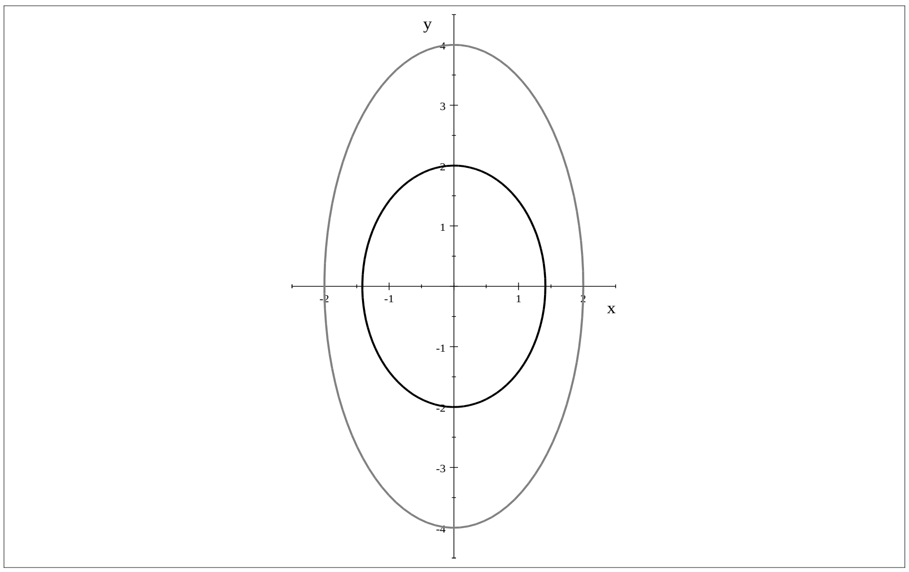
semieje x: $\sqrt{\frac{1}{a}}$ semieje y: $\sqrt{\frac{1}{b}}$

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

La elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ representa, podría decirse, a la misma elipse pero aumentada en una escala cuadrática. Los semiejes de esta elipse son ahora los inversos de los coeficientes (sin la raíz cuadrada).

$$\text{semieje } x\text{: } \frac{1}{a} \qquad\qquad \text{semieje } y\text{: } \frac{1}{b}$$

Para poder tener un apoyo visual, para poder plasmar todas figuras involucradas en un ejemplo[2], fijemos $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{4}$. La gráfica a continuación muestra el cambio de escala que se obtiene entre estas elipses.

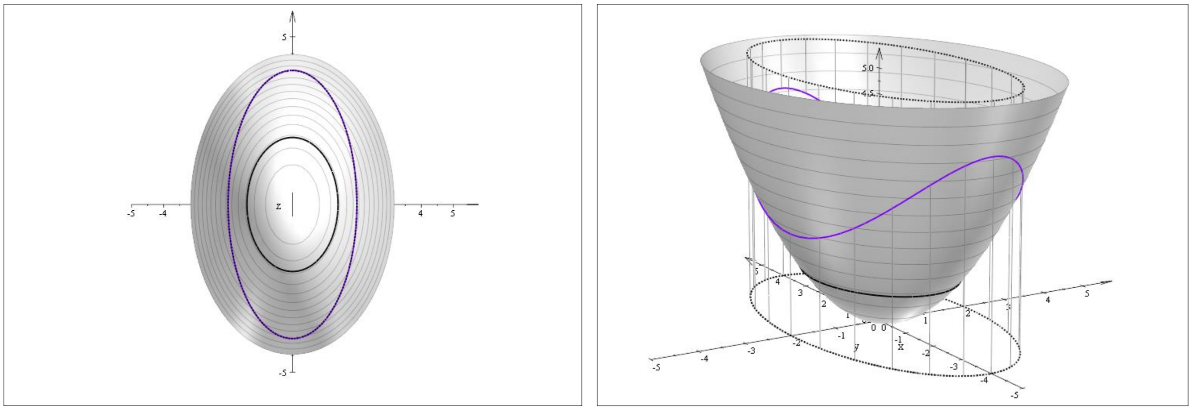


La elipse $ax^2 + by^2 = 1$ y la elipse con semiejes aumentados en una escala cuadrática $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

Veamos ahora a qué corresponde esto en el propio paraboloide. Vámonos a la tercera dimensión y hagamos uso de nuestro moderno compás capaz de representar sólidos y superficies (no siempre) sin mayor dificultad. Abajo, en la gráfica de la izquierda se ven ambas elipses desde un punto sobre el $eje - z$: la elipse en $z = 1$ y la elipse aumentada en la escala cuadrática. En la gráfica de la derecha se ve ya la curva violeta que representa la restricción de la elipse sobre el paraboloide: la intersección entre el cilindro elíptico que define la elipse y el paraboloide.

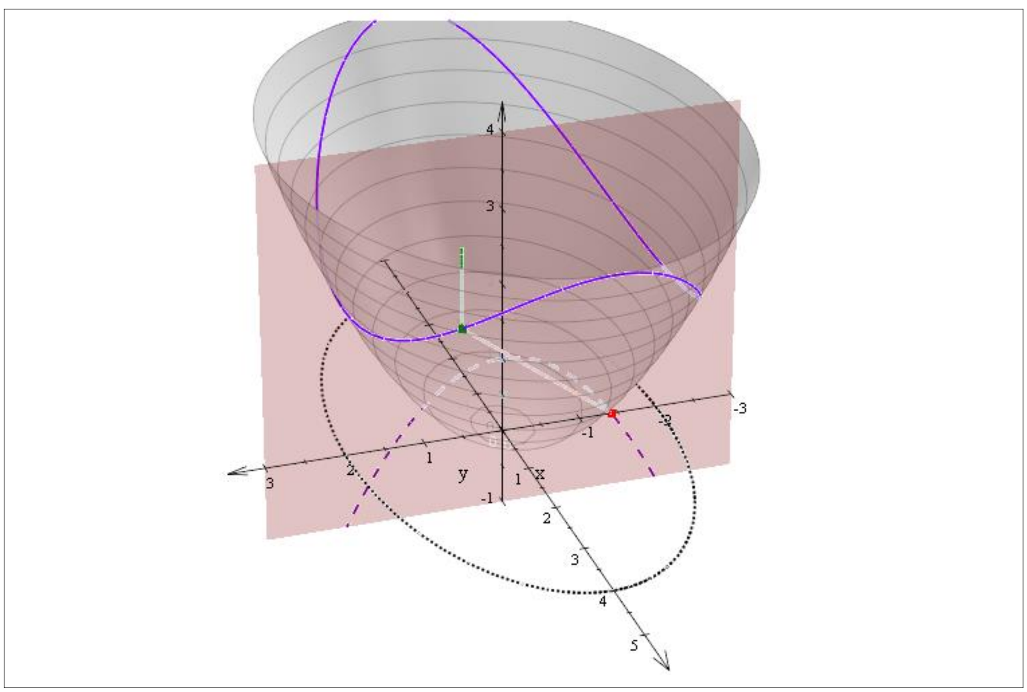
[2] De aquí en adelante se considerará $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{4}$, pero para mantener un procedimiento general, en ningún momento a lo largo de él se hará referencia alguna a dichos valores ni se hará uso propiamente de ellos.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]



Restricción en la cual se encuentra el punto p vista desde arriba ($eje - z$) y vista en perspectiva.

Localizada la curva donde se encuentra el punto p, procedamos ahora a identificar qué es lo que dice el propio enunciado del problema en términos gráficos.



El lugar geométrico es un segmento parabólico cuyo foco coincide con él la parábola $z = ax^2$ en el plano $y = 0$ (rojo).

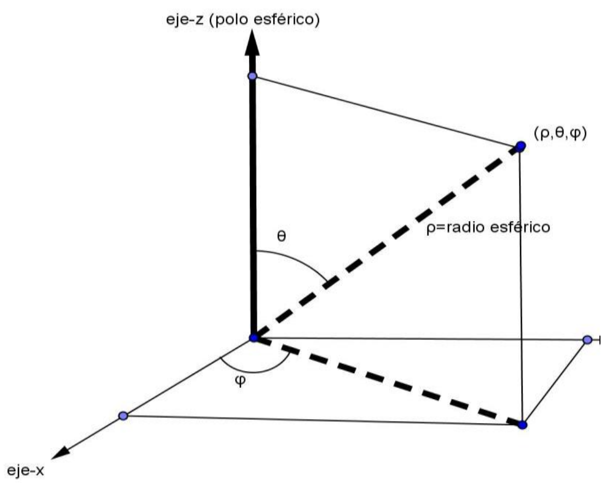
En verde se ve el rayo incidente en un punto p que se encuentra en el paraboloide y sobre la curva $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ (curva punteada en color negro en el $plano - xy$); en rojo se ve el rayo reflejado y la parábola que describiría si el punto p recorriera toda la curva se ve en la línea punteada. El vértice de esta parábola está marcado en azul y el foco en negro —ambos se distinguen con algún esfuerzo a través de la transparencia del propio paraboloide.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

El juego comienza, las reglas ya están establecidas y nadie puede juzgarlas. (Si alguien quiere romperlas, nadie tampoco habrá de juzgarlo). El primero que logre dar con la solución, con una demostración lógica de la validez del enunciado, se gana la admiración de todos. Las reglas del juego son libres, pero nuevamente vamos a jugar al juego de la geometría vectorial.

Recordemos que en el espacio tridimensional las rotaciones y las reflexiones que se hicieron en la parábola del caso

ya que calculan de manera explícita los ángulos de rotación que van a ser necesarios.



Coordenadas esféricas. Ángulos de rotación.

El gradiente de una función que tenga como superficie de nivel al paraboloide dado va a ser un vector normal a dicho paraboloide. Si $F(x,y,z) = ax^2 + by^2 - z$, entonces el vector normal a la superficie sería $\vec{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 2ax_0 \\ 2by_0 \\ -1 \end{bmatrix}$. De aquí se desprende

bidimensional se complican más y, en alguna medida, justifican plenamente el uso de transformaciones vectoriales. En primera instancia, habrá que hacer dos rotaciones para poder llevar el punto a un plano; en segunda instancia, la reflexión se tendrá que hacer respecto a un vector normal a la superficie. Comencemos, pues, con las coordenadas esféricas de un vector normal a la superficie en el punto $p = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, las coordenadas esféricas son la elección

que los ángulos de las coordenadas esféricas de este vector, definidos según la figura anterior, van a ser los ángulos que servirán para las rotaciones.

$$\tan\phi = \frac{2by_0}{2ax_0} \qquad \tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{(2ax_0)^2 + (2by_0)^2}}$$

Cómo la dirección de l está dada por el vector[3] $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, la dirección la recta l^* en función de los ángulos anteriores estaría dada por:

$$\overrightarrow{v^*} = \begin{bmatrix} \cos\phi \sin 2\theta \\ \sin\phi \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Siguiendo la misma lógica del ejemplo anterior, pero ahora con dos rotaciones sucesivas

[3] La dirección, intuitivamente, habría estado dada por este vector, pero en sentido contrario; la posibilidad de invertir su dirección con un factor negativo (más adelante $t = \frac{-y_0}{\sin\phi \sin 2\theta}$ va a identificar a este factor) permite que se elija a cualquiera.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

$$\overrightarrow{v^*} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La ecuación vectorial de la recta, por lo tanto, sería:

$$\overrightarrow{r^*}(t) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \cos\phi \sin 2\theta \\ \sin\phi \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

Sea $\overrightarrow{p^*} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ el punto donde esta recta se interseca con el plano $y = 0$. Ya que este punto se localizaría en $t = \frac{-y_0}{\sin\phi \sin 2\theta}$, entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - y_0 \cot\phi \\ 0 \\ z_0 + y_0 \csc\phi \cot 2\theta \end{bmatrix}$$

A partir de las restricciones sobre el punto p,

$$z = ax_0^2 + by_0^2 \quad \text{y} \quad a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = 1,$$

de las ecuaciones para los ángulos

$$\tan\phi = \frac{2by_0}{2ax_0} \qquad \tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{(2ax_0)^2 + (2by_0)^2}} = \frac{1}{2}$$

y de algunas identidades trigonométricas

$$\cot 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} \qquad \csc\phi = \begin{cases} \sqrt{\cot^2\phi - 1} & \text{para } 0 < \phi < \pi \\ -\sqrt{\cot^2\phi - 1} & \text{para } \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

podríamos expresar las coordenadas de $\overrightarrow{p^*}$ como funciones de x_0 en el intervalo $-\frac{1}{a} \leq x_0 \leq \frac{1}{a}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 - y_0\left(\frac{ax_0}{by_0}\right) \\ 0 \\ ax_0^2 + b\left(\frac{1 - a^2x_0^2}{b^2}\right) \pm y_0 \sqrt{\left(\frac{ax_0}{by_0}\right)^2 - 1}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) \end{bmatrix}$$

Es fácil notar que la restricción que gobierna al signo de la raíz cuadrada es siempre positiva $\pm\text{signum}(y_0) = 1$, y podemos entonces concluir que el resultado de toda la simplificación sería

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{b - a}{b}\right) x_0 \\ 0 \\ \left(\frac{b - a}{b}\right) ax_0^2 + \frac{1}{b} - \frac{3}{4b} \end{bmatrix}$$

El lugar geométrico que describe $\overrightarrow{p^*}$, por lo tanto, es el de una parábola dada por las ecuaciones paramétricas anteriores o por la ecuación cartesiana

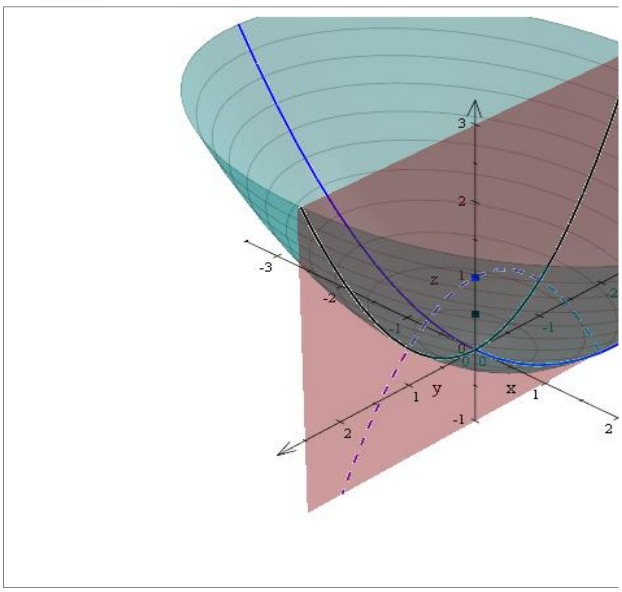
$$z = \frac{ab}{b - a}x^2 + \frac{1}{4b} \qquad \text{en el intervalo} \quad -\frac{|b - a|}{ab} < x < \frac{|b - a|}{ab}$$

Fácilmente se verifica que el foco de esta parábola se encuentra en el punto

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{b-a}{4ab} + \dfrac{1}{4b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{4a} \end{bmatrix}$$

Que coincide, evidentemente, con el foco de la parábola $z = ax^2$, la parábola identificada con el corte del paraboloide en el plano $y = 0$.

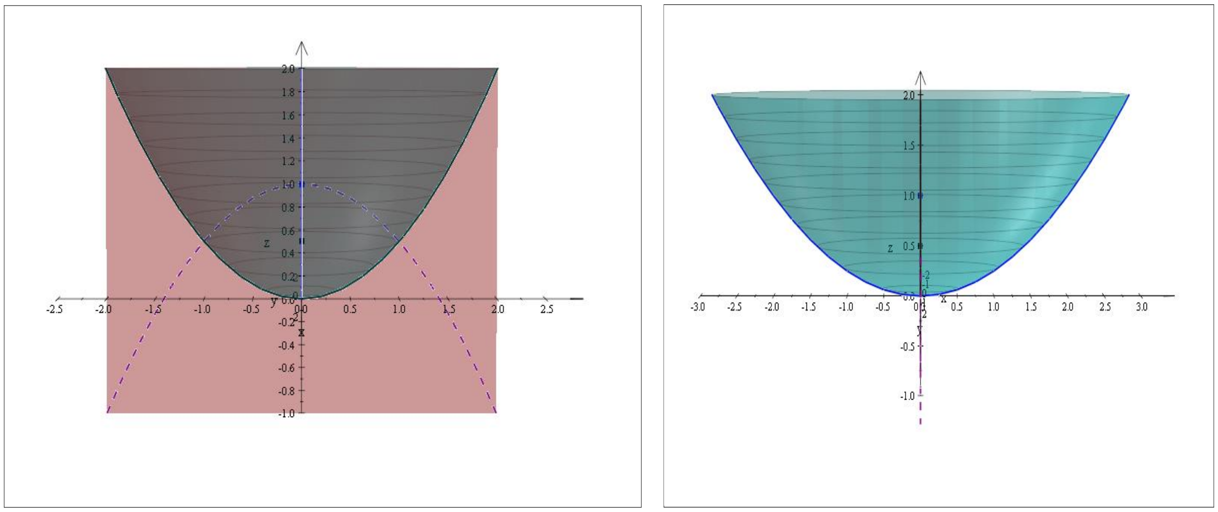


Vista de las tres parábolas: $z = ax^2$**,** $z = by^2$ **y** $z = \frac{ab}{b-a}x^2 + \frac{1}{4b}$**.**[4]

as siguiente gráficas ilustran aún mejor el resultado. La sección del paraboloide en $x = 0$ se muestra en color azul (su foco también en azul), la sección en $y = 0$ se muestra en color negro (su foco también en negro). El lugar geométrico que se describe se ve en la línea punteada: es una parábola cuyo vértice coincide con el foco de la parábola azul y cuyo foco coincide con el de la parábola negra. Las dos parábolas que comparten el mismo plano comparten el mismo foco. La rotación hacia un plano perpendicular altera la relación de foco en vértice: el foco de la parábola que está en un plano perpendicular pasa a ser el vértice de la otra.

[4] El tono del paraboloide se ha teñido de celeste para lograr un mejor contraste en ésta y en las siguientes dos gráficas. Fuera de este cambio (que también se efectuó, por la misma razón, en las últimas gráficas) para facilitar la ubicación de las curvas en el espacio, el código establecido por el color que se asocia a cada una de ellas se va a mantener a lo largo de la exposición.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]



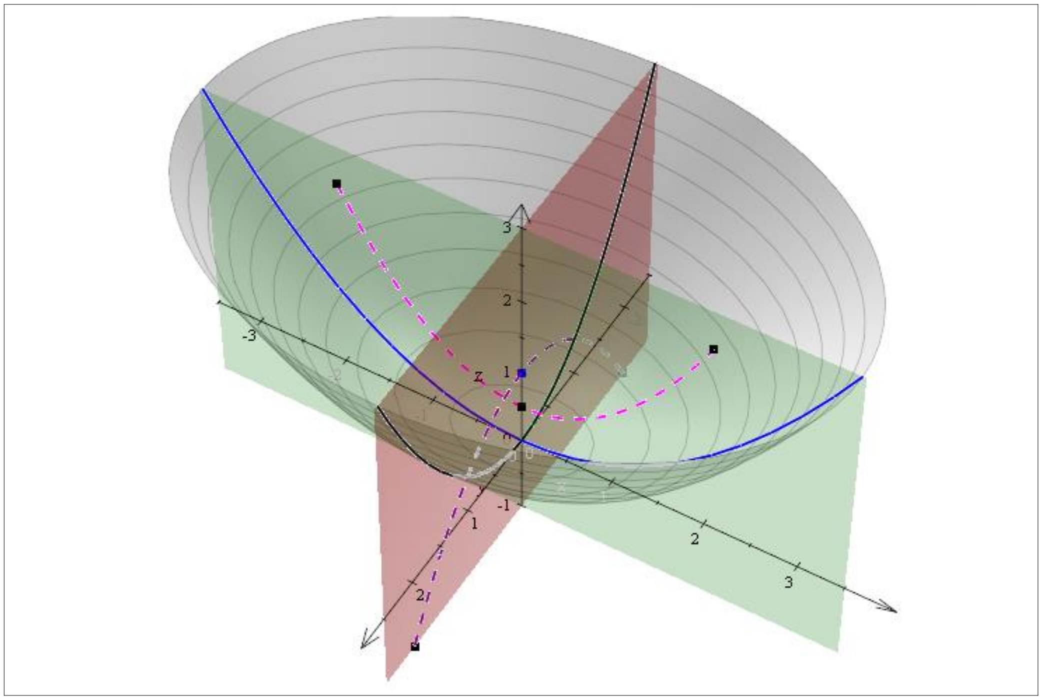
Vista de los cortes del paraboloide: plano $y = 0$ las dos parábolas comparten el mismo foco (izquierda); plano $x = 0$ (derecha) el foco de la parábola es el vértice del lugar geométrico que se ha definido.

Inicialmente, el planteamiento del problema se había hecho eligiendo el plano $y = 0$ para la proyección. La simetría de un paraboloide en relación con los ejes principales de la elipse permite sencillamente invertir los ejes, invertir las posiciones relativas de los parámetros a y b, y obtener así una parábola similar en el corte del paraboloide en el plano $x = 0$. Nuevamente tenemos que admitir que Descartes cambió nuestra forma de pensar y con ello, hasta nuestra forma de ser. Aquí entonces la parábola que se proyectaría sobre el plano $x = 0$:

$$z = \frac{ba}{a-b}y^2 + \frac{1}{4a} \quad \text{en el intervalo } -\frac{|a-b|}{ba} < y < \frac{|a-b|}{ba}$$

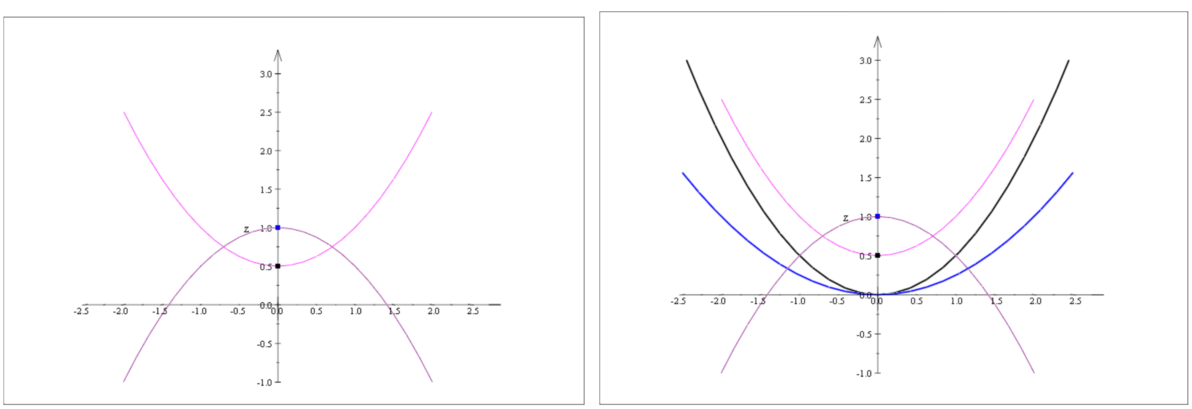
En la gráfica siguiente se puede ver esta parábola en conjunto con las otras tres que ya se habían trazado. En este caso, de acuerdo con la posición relativa de los focos de las parábolas, esta nueva parábola va a tener su foco en una posición relativa (a lo largo del $eje - z$) opuesta a la de la otra parábola. Una parábola tiene el foco arriba del vértice, abre con concavidad positiva; al intercambiar los papeles, la otra, por lo tanto, lo debe tener debajo y por ello abre con concavidad negativa. La matemática sigue siendo consistente.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]



Vista de las cuatro parábolas. En el plano $y = 0$ (rojo): $z = ax^2$ (negro) y $z = \frac{ab}{b-a}x^2 + \frac{1}{4b}$ (púrpura); en el plano plano $x = 0$ (verde): $z = by^2$ (azul) y $z = \frac{ab}{a-b}y^2 + \frac{1}{4a}$ (magenta)

La relación de simetría que hay entre las parábolas que se obtienen de las reflexiones en cada uno de los planos es relativamente sencilla. Vértice y foco se intercambian entre una y otra y la pareja simétrica pueda visualizarse de una mejor manera si se coloca en un mismo plano. La simetría de la relación entre ambas asombra por las características que sólo ahora se hacen evidentes.



Vista de las parábolas en un mismo plano cartesiano. Parábolas reflejadas; parábolas reflejadas y cortes del paraboloide.

El plato de al lado que se quedó olvidado: ensalada con aderezo de intervalos

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

Debemos regresar ahora por un momento a un detalle importante que se quedó sin mayor explicación. La ecuación cartesiana en la que se localizó al punto $\overrightarrow{p^*}$ se describió como la parábola

$$z = \frac{ab}{b-a}x^2 + \frac{1}{4b} \qquad \text{en el intervalo} \quad -\frac{|b-a|}{ab} < x < \frac{|b-a|}{ab}$$

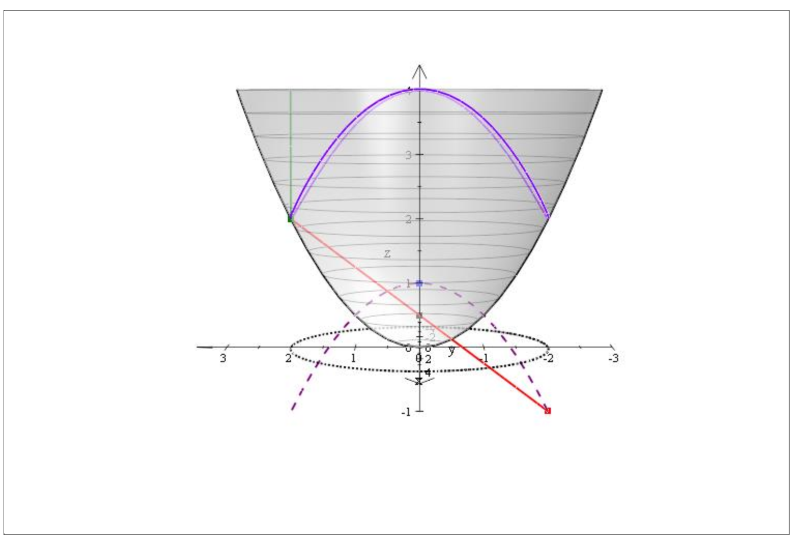
Una vez establecido el carácter parabólico e identificada la relación entre vértices y focos, conviene prestar algo de atención al intervalo que limita a esta curva. Retrocedamos un paso en el procedimiento y notemos que dicha ecuación vino de la relación

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{b-a}{b}\right) x_0 \\ 0 \\ \left(\frac{b-a}{b}\right) a x_0^2 + \frac{1}{b} - \frac{3}{4b} \end{bmatrix}$$

Recordemos también que x_0 se encuentra sobre la elipse $a^2x_0^2 + b^2y_0^2 = 1$ y está, por lo tanto, restringida a un intervalo que limitan los semiejes de dicha elipse.

$$x = \left(\frac{b-a}{b}\right) x_0 \qquad \text{en el intervalo} \quad |x_0| \le \frac{1}{a}$$

El resultado se desprende directamente. Solamente nos queda hacer una pequeña anotación para justificar el hecho de que el intervalo haya quedado abierto y no cerrado. No debe ser difícil ver que el punto que corresponde a $x_0 = \pm\frac{1}{a}$ no tiene uno que le corresponda como reflexión en el plano $y = 0$. La coordenada de punto sobre el paraboloide, $\left(\pm\frac{1}{a}, 0, z_0\right)$, produce una reflexión tangente al propio plano $y = 0$ —tangente al plano donde se quería proyectar—, que pasa por el foco de la parábola $z = ax^2$ y que apunta, en el límite, a la frontera del intervalo en el cual se traza la parábola sobre el plano $y = 0$.



Límite de la parábola reflejada. Nótese que la parábola reflejada resulta no ser más que una traslación de la otra.

Es oportuno mencionar en este punto que la semejanza entre la parábola que se va a reflejar sobre el plano $y = 0$ (púrpura y punteada) y la proyección parabólica de la curva (violeta) donde se localiza el punto p no es —como no lo es nada en las matemáticas— casualidad. Dado que la curva se define como la intersección entre $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ y $z = ax^2 + by^2$, la proyección de dicha curva sobre el plano $y = 0$ se puede expresar como

$$z = ax^2 + b\left(\frac{1 - a^2x^2}{b^2}\right)$$

$$z = \left(\frac{b - a}{b}\right)ax^2 + \frac{1}{b}$$

Esto no es más que una traslación a lo largo del $eje - z$ de la relación encontrada más arriba entre la coordenada x_0 del punto sobre el paraboloide y la coordenada z del punto reflejado sobre el plano $y = 0$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{b - a}{b}\right)x_0 \\ 0 \\ \left(\frac{b - a}{b}\right)ax_0^2 + \frac{1}{b} - \frac{3}{4b} \end{bmatrix}$$

El procedimiento que hemos seguido, el procedimiento de reflejar puntos a través de la superficie de un paraboloide y proyectarlos sobre un plano que la corta en partes simétricas tiene como figura invariante precisamente a esa parábola que se había definido inicialmente como una restricción aparentemente arbitraria[5]. La ecuación que definía a la coordenada x

$$x = \left(\frac{b - a}{b}\right)x_0$$

es, simplemente, como se puede ver la gráfica anterior, la responsable de la reflexión de las coordenadas situadas en el eje horizontal. Izquierda y derecha se corresponden en estas dos parábolas que no son más que traslaciones la una de la otra.

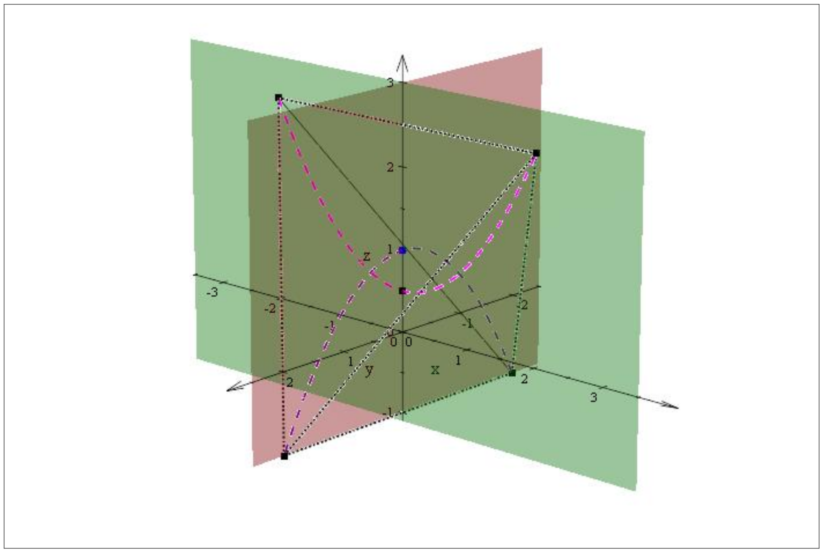
Postre: receta de la casa

El juego no se ha terminado. Hemos llegado al punto en el cual podemos enunciar la mayor generalización que se alcanza en este camino:

[5] El problema también podría haberse planteado como el problema de encontrar las curvas invariantes bajo el procedimiento que se había definido. Aquí se ha dado una solución parcial a este problema. La parábola definida por la restricción es una curva invariante, pero queda aún abierta la posibilidad de encontrar otras que también lo sean o de demostrar que no existen más.

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

El tetraedro que forman los cuatro puntos límite de las dos parábolas de reflexión es único. Dos tetraedros que correspondan a paraboloides elípticos diferentes van a ser siempre similares.



Tetraedro formado por los puntos límites de las dos parábolas.

Los puntos límite de la parábola proyectada sobre el plano $y = 0$ podemos ubicarlos de acuerdo con la ecuación que definía las coordenadas del punto p:

$$z = \frac{ab}{b-a}x^2 + \frac{1}{4b} \qquad \text{en el intervalo} \quad -\frac{|b-a|}{ab} < x < \frac{|b-a|}{ab}$$

$$\text{límite positivo: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{+}_{y=0} = \begin{bmatrix} \frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix}$$

$$\text{límite negativo: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{-}_{y=0} = \begin{bmatrix} -\frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(-\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix}$$

Si ahora intercambiamos el papel de los coeficientes a y b, obtendremos, como ya se había dicho, la ecuación para la parábola reflejada en el plano $x = 0$. Los límites para ésta estarían entonces dados por

$$\text{límite positivo: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{x=0}^{+} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{|a-b|}{ba} \\ \dfrac{ba}{a-b}\left(\dfrac{|a-b|}{ba}\right)^2 + \dfrac{1}{4a} \end{bmatrix}$$

$$\text{límite negativo: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{x=0}^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{|a-b|}{ba} \\ \dfrac{ba}{a-b}\left(-\dfrac{|a-b|}{ba}\right)^2 + \dfrac{1}{4a} \end{bmatrix}$$

Una vez tenemos identificados los puntos límite de ambas parábolas, no nos queda más que resolver para el ángulo que definen las rectas que unen a dichos puntos. Veamos, por ejemplo, los ángulos que se forman en el vértice que define $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{y=0}^{+}$. Los vectores que salen de este punto y lo conectan con los otros tres vértices estarían dados por las siguientes coordenadas:

$$\text{de } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{y=0}^{+} \text{ hasta } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{y=0}^{-}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(-\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2|b-a|}{ab} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{de } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{y=0}^{+} \text{ hasta } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{x=0}^{+}: \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{|a-b|}{ba} \\ \frac{ba}{a-b}\left(\frac{|a-b|}{ba}\right)^2 + \frac{1}{4a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{|b-a|}{ab} \\ \frac{|a-b|}{ba} \\ \left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right) + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4b} \end{bmatrix}$$

$$\text{de } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{y=0}^{+} \text{ hasta } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{x=0}^{-}: \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{|a-b|}{ba} \\ \frac{ba}{a-b}\left(-\frac{|a-b|}{ba}\right)^2 + \frac{1}{4a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{|b-a|}{ab} \\ 0 \\ \frac{ab}{b-a}\left(\frac{|b-a|}{ab}\right)^2 + \frac{1}{4b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{|b-a|}{ab} \\ -\frac{|a-b|}{ba} \\ \left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right) + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4b} \end{bmatrix}$$

Los tres ángulos que se forman en este vértice estarían dados por[6]

[6] El trabajo algebraico de simplificar estas expresiones se ha obviado para no interrumpir con detalles laboriosos que no aportan mucho.

$$\cos\alpha=\frac{\begin{bmatrix}-\frac{2|b-a|}{ab}\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}-\frac{2|b-a|}{ab}\\0\\0\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{4}{9}$$

$$\cos\beta=\frac{\begin{bmatrix}-\frac{2|b-a|}{ab}\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\-\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}-\frac{2|b-a|}{ab}\\0\\0\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\-\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{4}{9}$$

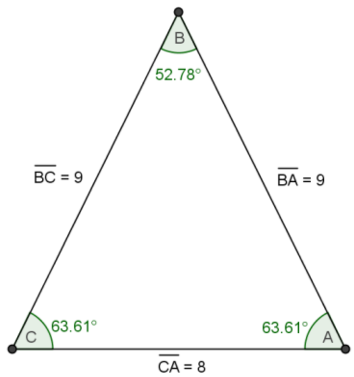
$$\cos\theta=\frac{\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\-\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\-\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}\right\|\left\|\begin{bmatrix}-\frac{|b-a|}{ab}\\\frac{|a-b|}{ba}\\\left(\frac{|b-a|^2}{a-b}\right)\left(\frac{2}{ab}\right)+\frac{1}{4a}-\frac{1}{4b}\end{bmatrix}\right\|}=\frac{49}{81}$$

El resultado demuestra así que los ángulos son independientes de cualquiera de los parámetros que definen al paraboloide y hacen de esta figura una figura única. Cualquier paraboloide elíptico deberá tener, por fuerza, un tetraedro semejante.

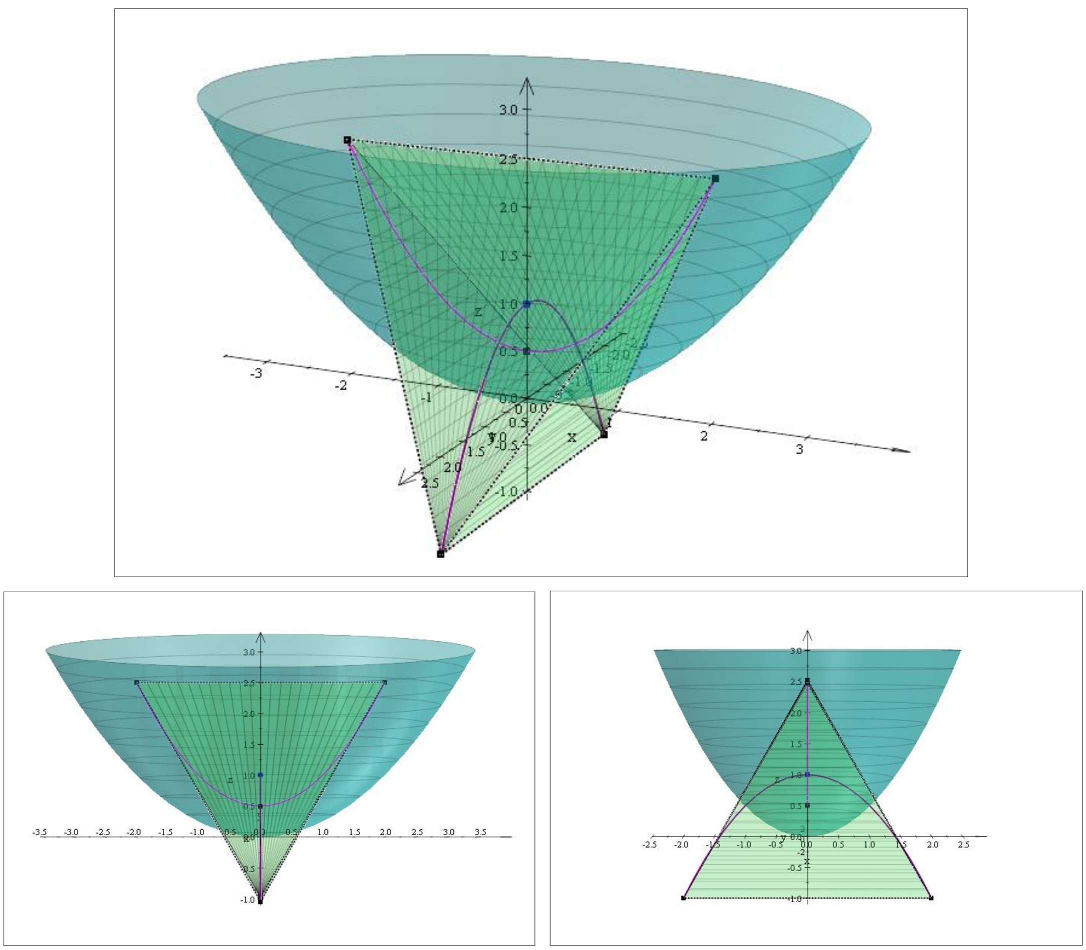
Notemos también que los ángulos que acaban de calcularse —que no están en un mismo triángulo— satisfacen

$$\alpha+\beta+\theta=\pi$$

Indica esto que todas las caras de dicho tetraedro, además, van a ser semejantes entre sí. Todas las caras, por ejemplo, van a ser semejantes a un triángulo isósceles con lados 8, 9 y 9



Lado ejemplar del tetraedro que todo paraboloide elíptico va a tener asociado



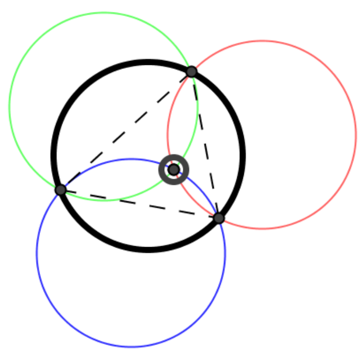
Imágenes del paraboloide elíptico y del tetraedro único en perspectiva (arriba), en el plano $x = 0$ (izquierda) y en el plano $y = 0$ (derecha)

BANQUETE DE PARÁBOLAS, ELIPSES, Y TETRAEDROS SALPICADOS DE REFLEXIONES Y SIMETRÍAS[1]

Por el momento, hemos llegado al final del juego que habíamos propuestos (y lo hemos ganado); hemos incluso jugado en tiempo extra un tetraedro que no figuraba en el planteamiento original. Por el momento, digo, porque ya habrá una oportunidad de volver a formular un juego a partir de éste y continuar con la diversión. No hay nada mejor que practicar la moderación y ya nos hemos dado un gran banquete; para esta hora, creo que todos estamos llenos y satisfechos.

Digestivo: sin pretensión alguna

En 1916 Roger Arthur Johnson asombró a la comunidad matemática con un simple artículo que publicó en *The American Mathematical Monthly* donde demostró un teorema con una simplicidad digna de figurar entre las proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Si tres círculos idénticos se intersecan en un punto, entonces los otros tres puntos de intersección entre las parejas de círculos van a estar en un cuarto círculo idéntico a los primeros tres.



Teorema de los cuatros circunferencias de Johnson

Que una propiedad tan simple no se hubiera descubierto sino hasta los primeros años del siglo XX fue una evidencia irrefutable de la aún abierta posibilidad de descubrir relaciones matemáticas importantes —por no decir estrictamente estéticas— hasta en las figuras más simples. Hasta el momento, no se conoce de ningún trabajo que haya descrito la relación entre estas parábolas (así como tampoco se conoce de ninguna propiedad más trascendente que puedan tener), ni se haya intentado una definición o un estudio del tetraedro invariante pero quizás es sólo porque no se ha buscado bien.

En 1973 Roger Penrose descubrió la que ahora se conoce como Teselación de Penrose: una forma de cubrir un plano con un patrón aperiódico de simetría pentagonal. Cerca de 25 años más tarde entabló una demanda legal contra Kimberly-Clark por haber utilizado este patrón en la textura del papel de baño. Roger Penrose tenían en su poder el derecho de autor sobre su invención. Una década después se identificó este mismo patrón en dibujos de principios del siglo XVI hechos por Albrecht Dürer y en obras de arte islámico que databan de la edad media.

Quizás no se ha buscado bien o quizás no se ha buscado en los lugares adecuados. ¿Quién puede asegurar que este resultado no se encuentra ya en algún viejo libro de cocina o en imágenes que ya había prefigurado el hombre que hizo los primeros dibujos en una cueva?