

REGRESIÓN NO LINEAL

Ing. Freddy Rolando Girón Azurdia¹

RESUMEN

En el artículo denominado "Regresión Lineal Simple: interpretación de resultados de Excel", explicaba la importancia para las empresas de un pronóstico lo más cercano posible a la realidad. Una empresa cuyos pronósticos fueran superiores a la demanda real tendría altos inventarios y problemas de liquidez; si los pronósticos fueran inferiores a la demanda real no se podría satisfacer los pedidos de los clientes y habría ventas y utilidades que no se realizarían. Si existe una relación lineal "causa - efecto" entre dos variables se utiliza la Regresión Lineal Simple y si en dicha relación hay varias variables independientes, se utiliza la Regresión Lineal Múltiple. En este artículo trataremos aquellos casos en los cuales la relación no es lineal pero sí puede ser linealizada y por lo tanto resuelta utilizando Excel. Se sugieren una serie de pasos para escoger la mejor Regresión No Lineal tomando en cuenta la validez, minimización de los errores al cuadrado y la lógica y utilidad de los pronósticos.

DESCRIPTORES

Pronóstico, Regresión, No Lineal, Linealizada, Excel, validez, error.

ABSTRACT

In the article called "Simple Linear Regression: interpreting results of Excel," I explained the importance for companies to forecast as close as possible to reality.

A company whose forecasts were higher than actual demand would have high inventories and problems of liquidity, if forecasts were lower than actual demand it might not satisfy the orders of the clients and there would be sales and profit that would not be realized. If there is a linear relationship of "cause - effect" between two variables is used Simple Linear Regression, and if there are several independent variables in this relationship, the Multiple Linear Regression is used.

This article will deal with those cases in which the relationship is nonlinear but can be linearized and therefore resolved using Excel. A series of steps are suggested to choose the best Nonlinear Regression considering validity, minimizing the squared errors and the logic and usefulness of forecasts.

KEYWORDS

¹ Profesor de dedicación completa en Universidad Rafael Landívar

REGRESIÓN NO LINEAL

Forecasting, Regression, Nonlinear, Linearized, Excel, validity, error.

REGRESIÓN NO LINEAL

La Regresión Lineal es un método de pronóstico que utiliza valores históricos de la variable dependiente (Y) que se supone dependen linealmente de los valores históricos de la(s) variable(s) independiente(s) (X). Siempre es deseable que la relación entre las variables sea lineal porque la solución e interpretación son muy sencillas pero en muchos casos es necesario buscar opciones no lineales debido a que la opción lineal no nos proporciona el menor error o no es válida y por lo tanto sus pronósticos no serán los mejores.

Para las regresiones no lineales tenemos dos opciones:

- a) No lineales pero linealizables
- b) No lineales y no linealizables

Este artículo se enfocará en las regresiones no lineales pero linealizables simples, para las no linealizables se recomienda consultar los libros de Bates y Watts (1988) y Seber y Wild (1989).

La secuencia de solución sugerida es la siguiente:

PASO PREVIO: analizar los datos para verificar si se debe proceder a una discriminación de algún período. Dado que en los modelos no lineales

aparecen datos con variaciones importantes respecto a períodos anteriores, la discriminación se llevará a cabo solamente si hay evidencia de que en ese período sucedió un fenómeno especial que justifique eliminar la información. Este sería el caso de las ventas de una empresa en un mes que hubo catástrofes naturales o escasez de materia prima en la producción.

PASO 1. Con los datos originales generar un gráfico que nos indicará si la relación entre las variables es definitivamente lineal o es muy probable que sea no lineal.

PASO 2.- Con los datos originales generar el Diagrama de Dispersión que proporciona Excel. Si el Coeficiente de Determinación R^2 de la Regresión Lineal es el mayor de las regresiones, sólo faltaría verificar la validez para lo cual debe correrse el programa de Excel correspondiente. Si la regresión es válida ya tenemos una opción de solución.

Si la Regresión Lineal no tiene el mayor R^2 se escogerán las 2 opciones con mayor valor para linealizarlas y verificar su validez.

PASO 3. Comparar la gráfica de los datos originales con los gráficos auxiliares de regresiones no incluidas en el Diagrama de Dispersión, escoger la opción más parecida para linealizarla. Si la regresión es válida ya tenemos otra opción.

REGRESIÓN NO LINEAL

PASO 4. Linealizar las opciones de los pasos 2 y 3.

PASO 5. Escoger las 2 mejores regresiones válidas con el menor error. Se entiende por válida aquella cuyo valor de probabilidad (valor p) del coeficiente de la variable independiente sea menor a 0.05. Usaremos como medidas de error el MSE (Mean Square Error, Error Cuadrático Medio) y el ERROR TÍPICO, ambos se calculan a partir de los residuos o errores al cuadrado.

PASO 6. Verificar la validez de los supuestos de la Regresión Lineal ya

que habremos escogido una regresión linealizada.

PASO 7. Verificar si la regresión escogida proporciona valores lógicos en sus pronósticos para que se establezca como la mejor opción.

Usaremos el ejemplo de una abarrotería en el interior del país que inició operaciones hace 24 meses y debido a la buena atención, amplio surtido y precios razonables ha logrado incrementar sus ventas en Quetzales casi todos los meses. Se desea pronosticar las ventas del mes 25.

MES	VENTAS EN Q
X	Y
1	226
2	1,589
3	3,383
4	4,930
5	12,403
6	17,989
7	20,500
8	25,748
9	24,262
10	29,936
11	29,489
12	30,074

MES	VENTAS EN Q
X	Y
13	32,124
14	33,210
15	32,277
16	36,152
17	36,377
18	33,928
19	36,285
20	34,864
21	34,635
22	34,860
23	37,905
24	35,865

Tabla 1. Elaboración propia

PASO PREVIO: dado que no hay evidencia de que algún dato sea no representativo, no se hará ninguna discriminación de datos.

PASO 1. El gráfico de los datos originales es el siguiente:

REGRESIÓN NO LINEAL

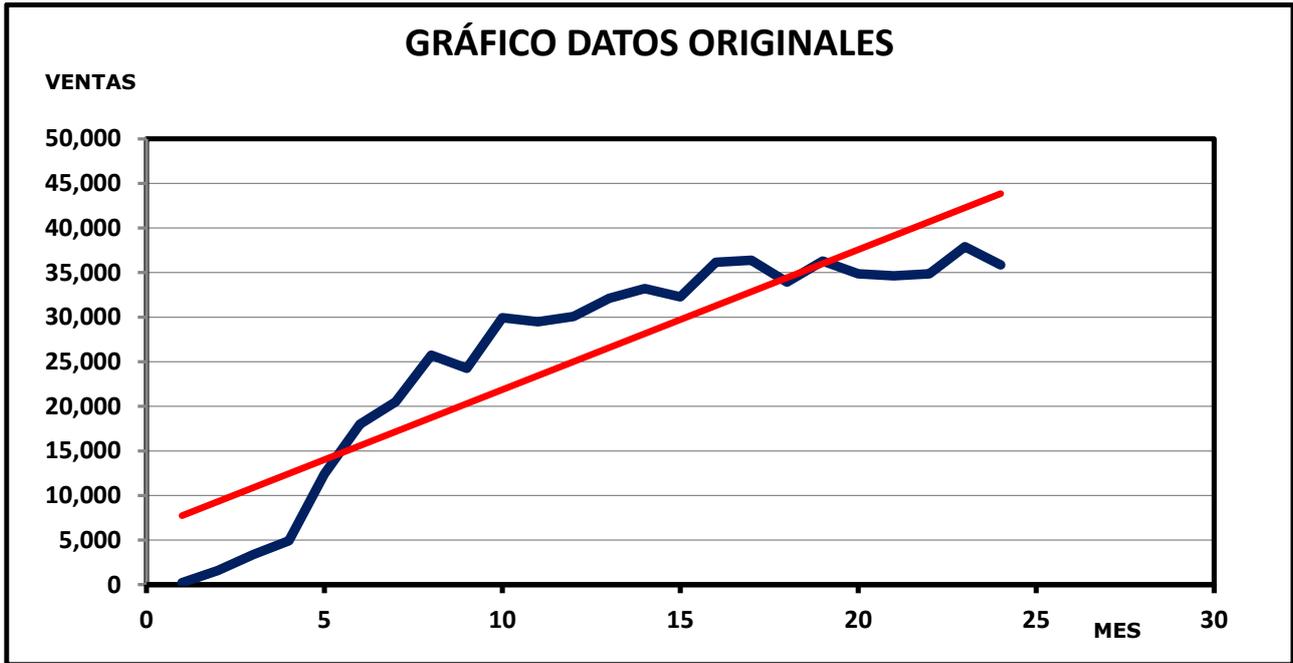


Gráfico 1. Elaboración propia

Se ve claramente que la relación entre las dos variables es no lineal.

PASO 2. Se presenta a continuación el Diagrama de Dispersión que nos proporciona las diferentes ecuaciones y el valor de R^2 , el coeficiente de determinación, el cual nos indica qué tanto explica la variable independiente a la dependiente.

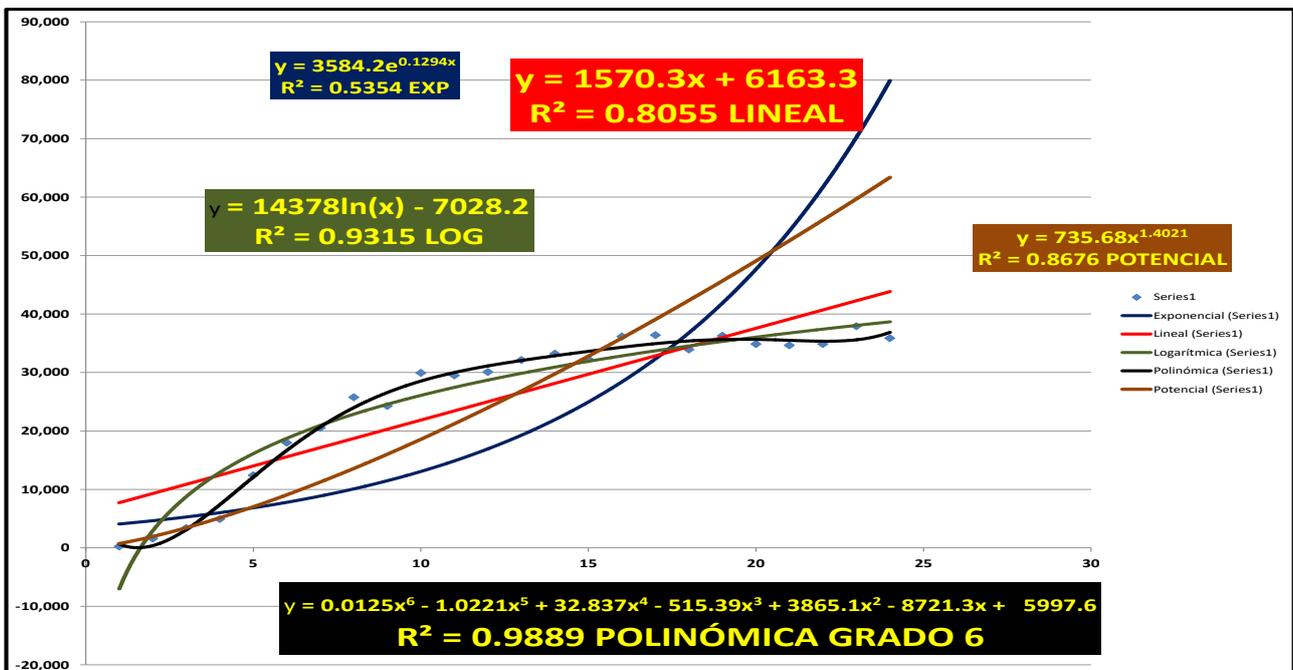


Gráfico 2. Diagrama de Dispersión.
Elaboración propia

REGRESIÓN NO LINEAL

En base a los valores de R^2 , Las dos mejores opciones son la **Polinómica de grado 6 y la Logarítmica**.

PASO 3. Se presentan a continuación los gráficos auxiliares con sus linealizaciones.

3A. INVERSA e INVERSA Y EXPONENCIAL

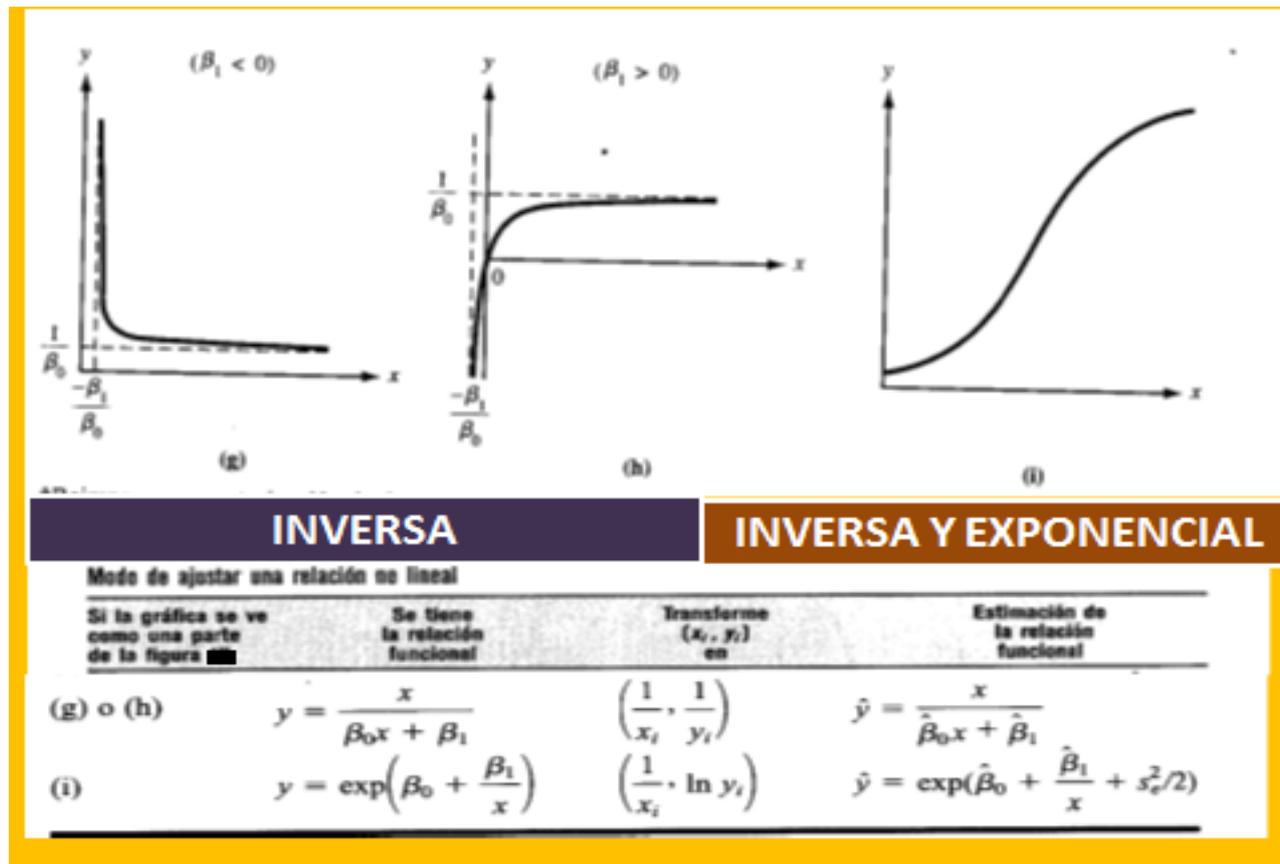


Gráfico 3. Adaptado de Investigación de Operaciones de Winston, Cengage Learning

3B. PARÁBOLA

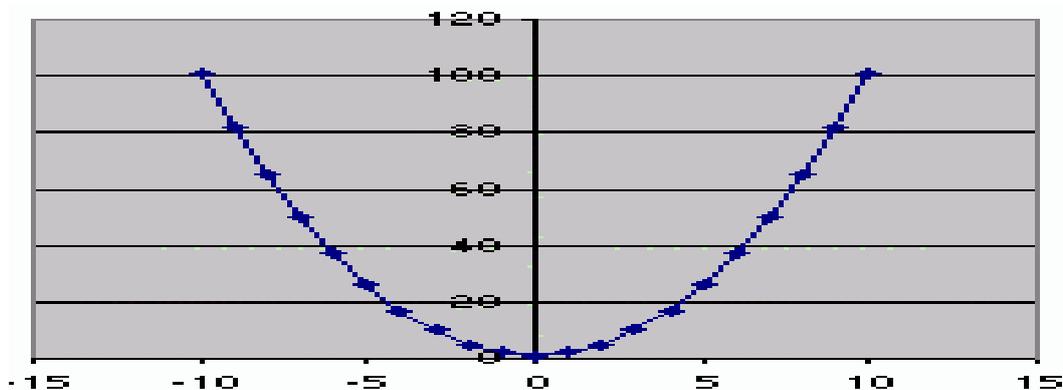


Gráfico 4. Parábola de Regresión. Sociedad Española de Bioquímica Clínica

REGRESIÓN NO LINEAL

La fórmula es: $Y = a + b X + c X^2$. Los valores de los coeficientes a , b y c se obtienen resolviendo:

$$\sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4$$

3C. HIPÉRBOLA

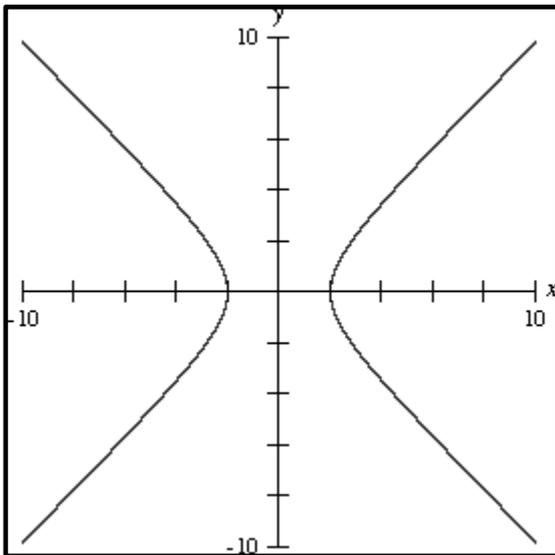


Gráfico 5. Hipérbola. WikiMatemática.Org

La fórmula es : $Y = a + b/X$. Los valores de los coeficientes a y b se obtiene resolviendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - y_j \right) = 0 \\ \sum_{i,j=1}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - y_j \right) \left(\frac{1}{x_i} \right) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} aN + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = \sum_{j=1}^n y_j \\ a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i,j=1}^n \frac{y_j}{x_i} \end{array} \right]$$

REGRESIÓN NO LINEAL

* Fórmulas para resolver Regresión Parabólica e Hiperbólica tomadas de la Sociedad Española de Bioquímica Clínica.

De las opciones de Gráficos auxiliares, la que más se ajusta a la Gráfica de Datos Originales es la **Inversa y Exponencial**.

Se proporcionan a continuación los gráficos y las fórmulas para linealizar de las 2 opciones que no se consideran en este ejemplo pero que sí se incluyen en los Diagramas de Dispersión: Potencial y Exponencial.

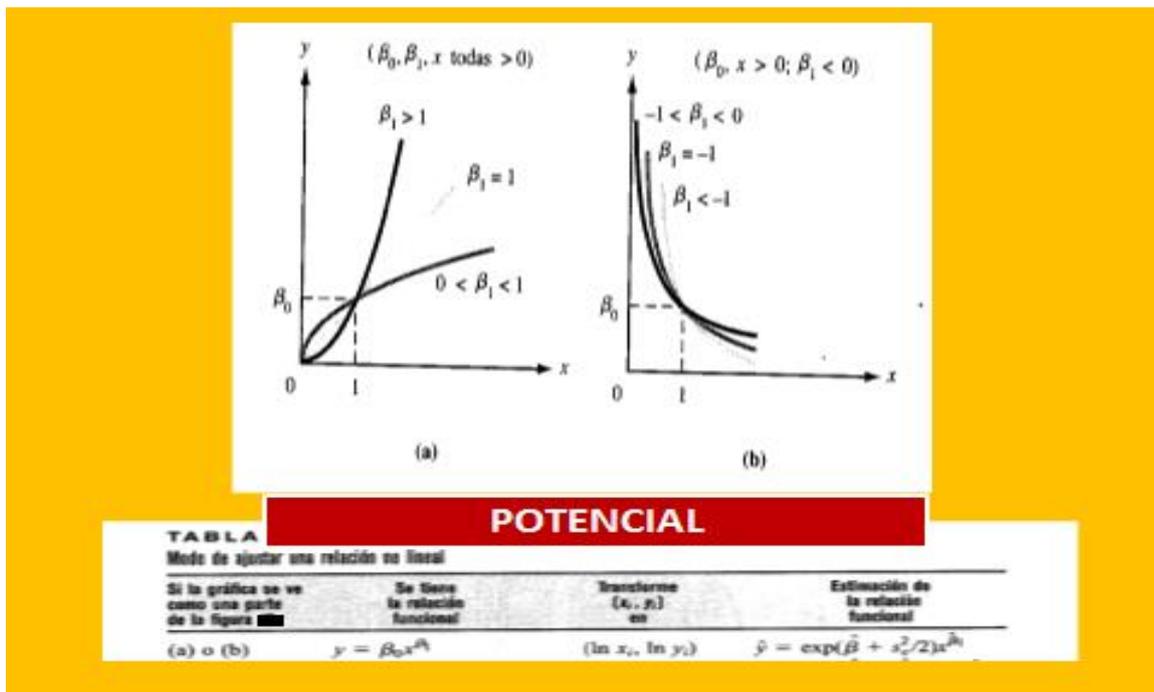


Gráfico 6. Adaptado de Investigación de Operaciones de Winston, Cengage Learning

REGRESIÓN NO LINEAL

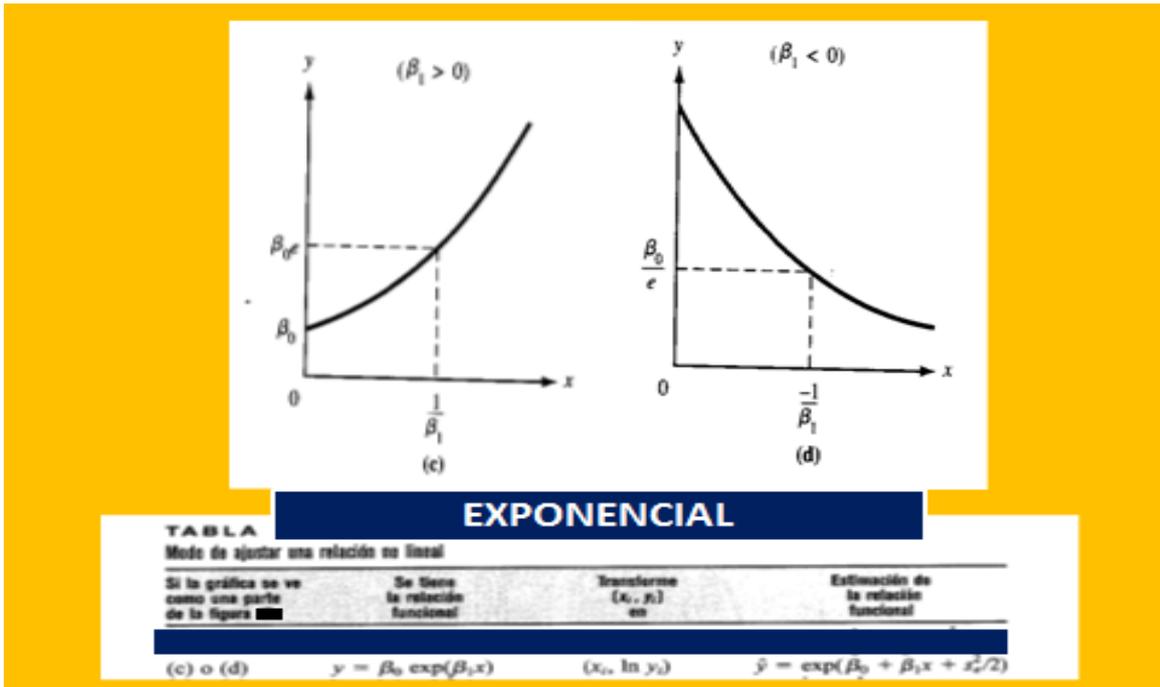


Gráfico 7. Adaptado de Investigación de Operaciones de Winston, Cengage Learning

PASO 4. LINEALIZACIÓN DE LAS MEJORES OPCIONES

4.1 POLINÓMICA

REGRESIÓN NO LINEAL

POLINOMICA GRADO 6:

CONVERSIÓN PARA REGRESIÓN

Observación	X1	X2	X3	X4	X5	X6
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64
23	23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	24	576	13824	331776	7962624	191102976

Estadísticas de la regresión

Coeficiente de correlación múltiple	0.99441419
Coeficiente de determinación R ²	0.98885958
R ² ajustado	0.984927669
Error típico	1518.8492
Observaciones	24

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	6	3481058666	580176444.4	251.4958281	1.22418E-15
Residuos	17	39,217,348.57	2306902.857		
Total	23	3520276015			

VER SUMATORIA ARRIBA DE MSE

VÁLIDOS

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad
Intercepción	5997.586135	3901.297724	1.537331052	0.142615913
Variable X 1	-8721.285698	3852.773666	-2.263638213	0.036969045
Variable X 2	3865.059936	1242.470141	3.110786978	0.006355881
Variable X 3	-515.3947578	179.2284345	-2.875630528	0.010490176
Variable X 4	32.83702316	12.78444748	2.568513282	0.01993499
Variable X 5	-1.02205085	0.440790099	-2.318679234	0.033126822
Variable X 6	0.012466568	0.005859526	2.127572636	0.048305419

$$y = 0.00125x^6 - 1.0221x^5 + 32.837x^4 - 515.39x^3 + 3965.1x^2 - 8721.3x + 5997.6$$

Análisis de los residuales

Observación	Pronóstico para Y	Residuos	DATOS ORIG	MSE
				RESIDUOS ²
1	657.79305	-432.2930545	226	186,877.28
2	385.58103	1203.168975	1,589	1,447,615.58
23	35,591.77310	2312.726905	37,905	5,348,705.74
24	36,871.97213	-1007.222133	35,865	1,014,496.42
SUMA RES ²				39,217,348.57
MSE				1,634,056.19

Tabla 2. Elaboración propia en base a Regresión Excel

REGRESIÓN NO LINEAL

4.2 LOGARÍTMICA

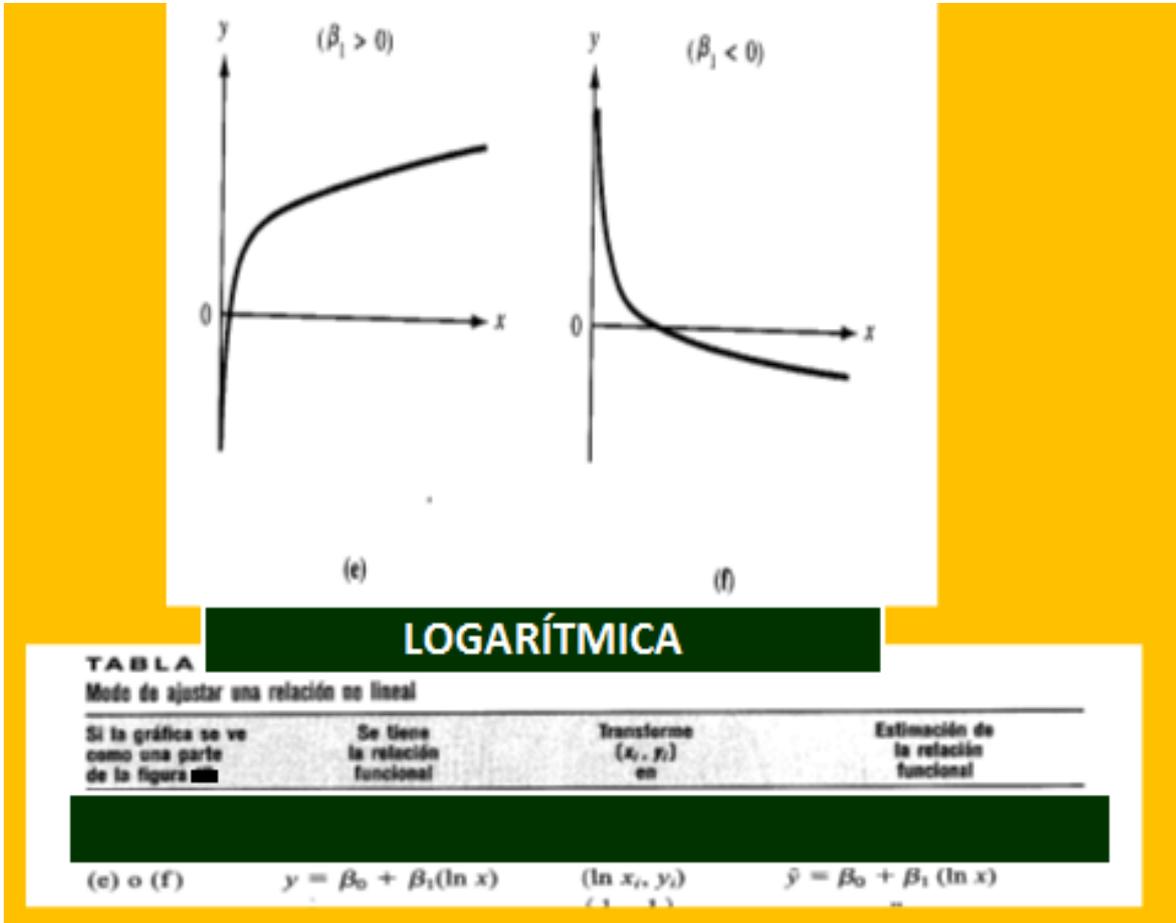


Gráfico 8. Adaptado de Investigación de Operaciones de Winston, Cengage Learning

A continuación la linealización de la logarítmica:

REGRESIÓN NO LINEAL

LOGARÍTMICA

GRÁFICA TIPO (e)

LA ECUACIÓN ES: $Y = B_0 + B_1 (\ln X)$

CONVERTIR (X,Y) EN: (LN X,Y)

NOS DARÁ LA INFORMACIÓN PARA LA ECUACIÓN:

$Y' = B_0' + B_1' (\ln X)$

X	Y	LN(X)	Y	
MES	VENTAS			
1	226	0.000000000	226	EXCEL: =LN(X)
2	1,589	0.693147181	1,589	
23	37,905	3.135494216	37,905	
24	35,865	3.178053830	35,865	

Resumen LOGARÍTMICA

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación múltiple	0.965149527
Coefficiente de determinación R ²	0.93151361
R ² ajustado	0.928400592
Error típico	3310.39
Observaciones	24

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	Suma de cuadrados medio de los cuadra	F	Valor crítico de F
Regresión	1	3279185016	3279185016	299.2317041
Residuos	22	241,090,998.65	10958681.76	2.70101E-14
Total	23	3520276015		

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	-7028.187539	2014.045046	-3.489588058	0.002075282	-11205.06132	-2851.313762
Variable X 1	14377.80673	831.1680458	17.29831506	2.70101E-14	12654.0697	16101.54375

$Y' = B_0' + B_1' (\ln X)$

MENOR A 0.05: VÁLIDO

$Y' = -7,028.187539 + 14,377.80673(\ln X)$

Análisis de los residuales

Observación NO DATOS	Pronóstico para Y	Residuos	DATOS ORIG	MSE	
				RESIDUOS ²	
1	-7,028.187539	7253.687539	226	52,615,982.92	$Y' = -7,028.187539 + 14,377.80673(\ln X)$ CON X = 1 -7028.187539
2	2,937.748657	-1348.998657	1,589	1,819,797.38	
3	8,767.447616	-5384.947616	3,383	28,997,660.83	
4	12,903.684853	-7973.434853	4,930	63,575,663.36	
5	16,111.999707	-3709.499707	12,403	13,760,388.07	
6	18,733.383813	-744.6338127	17,989	554,479.51	
7	20,949.732494	-449.7324943	20,500	202,259.32	
23	38,053.342295	-148.8422948	37,905	22,154.03	
24	38,665.256205	-2800.506205	35,865	7,842,835.01	
SUMA RES ²				241,090,998.65	
MSE				10,045,458.28	

Tabla 3. Elaboración propia en base a Regresión Excel

REGRESIÓN NO LINEAL

4.3 INVERSA Y EXPONENCIAL

REGRESIÓN NO LINEAL

INVERSA Y EXPONENCIAL

GRÁFICA TIPO (i)

LA ECUACIÓN ES: $Y = \text{EXP}(B_0 + B_1/X)$

CONVERTIR (X,Y) EN: (1/X, LN Y)

NOS DARÁ LA INFORMACIÓN PARA LA ECUACIÓN:

$$Y' = \text{EXP}(B_0 + B_1' / X + SE^2 / 2)$$

X	Y	1/X	LN (Y)
MES	VENTAS	1/MES	ln (VENTAS)
1	226	1.000000000	5.418320159
2	1,589	0.500000000	7.370702823
23	37,905	0.043478261	10.54282512
24	35,865	0.041666667	10.4875102

Resumen INVERSA Y EXPONENCIAL

Estadísticas de la regresión	
Coefficiente de correlación	0.976967084
Coefficiente de determinación R ²	0.95446468
R ² ajustado	0.952394896
Error típico	0.2727561
Observaciones	24

SE = STD ERROR

ANÁLISIS DE VARIANZA

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Promedio de los cuadrados	F	Valor crítico de F
Regresión	1	34.30703371	34.30703371	461.1414715	2.99839E-16
Residuos	22	1.636709748	0.074395898		
Total	23	35.94374346			

VER "SUMATORIA"

	Coefficientes	Error típico	Estadístico t	Probabilidad	Inferior 95%	Superior 95%
Intercepción	10.7182776	0.070164463	152.7593481	8.70881E-35	10.57276546	10.86378984
1/MES	-5.82801996	0.271396311	-21.47420479	2.99839E-16	-6.390861457	-5.265178457

VÁLIDO

$$Y' = \text{EXP}(B_0 + B_1' / X + SE^2 / 2)$$

SE² = ERROR TÍPICO²

$$Y = \text{EXP}(10.71827765 - 5.828019957/X + 0.5 * 0.272756114^2)$$

FÓRMULA $Y = \text{EXP}(10.7555 - 5.8280/X)$

MSE CON INVERSA Y EXPONENCIAL

IMPORTANTE: NO SE UTILIZA EL ANÁLISIS DE RESIDUALES QUE PROPORCIONA EXCEL

Observación	PRONÓSTICO CON LA FÓRMULA	DATOS ORIG	RESIDUOS CON FÓRMULA	MSE
				RESIDUOS ²
1	138.03400	226	-87	7,650.30
2	2,544.01800	1,589	955	912,536.95
23	36,392.16181	37,905	-1512.338186	2,287,166.79
24	36,778.42469	35,865	914	834,801.44
SUMA RES ²				122,883,143.87
MSE				5,120,130.99
NUEVO ERROR TÍPICO =				2,363.39
RAIZ(122,883,143.87/22) =				2,363.39

Tabla 4. Elaboración propia en base a Regresión Excel

REGRESIÓN NO LINEAL

PASO 5. Escoger las 2 mejores regresiones válidas con el menor error

TODAS LAS OPCIONES		R ²	MSE	ERROR TÍPICO CON FÓRMULAS
POLINOMIAL	$y = 0.0125x^6 - 1.0221x^5 + 32.837x^4 - 515.39x^3 + 3865.1x^2 - 8721.3x + 5997.6$	0.9889	1,634,056	1,518
INV Y EXP	$Y = \text{EXP} (10.7555 - 5.8280/X)$	0.9545	5,120,130	2,363
LOGARÍTMICA	$Y = -7,028.1875 + 14,377.8067 (\text{LN}X)$	0.9315	10,045,458	3,310
LINEAL	$Y = 6,163.3016 + 1,570.2947X$	0.8055	28,524,035	5,578

Tabla 5. Elaboración propia

Se incluyeron los resultados de la REGRESIÓN LINEAL sólo como referencia. Todas las regresiones son válidas y las que presentan el mayor R² y los menores valores de error (MSE y Error Típico) son la **POLINOMIAL** y la **INVERSA Y EXPONENCIAL**.

PASO 6. Verificar la validez de los supuestos de la Regresión Lineal ya que estamos trabajando con regresiones linealizadas.

1. LINEALIDAD: al linealizar se cumple este supuesto.
2. INDEPENDENCIA: los residuos son independientes entre sí. Se utiliza el Estadístico Durbin-Watson (d) para establecer la independencia:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

El error "e" es el residuo o sea la diferencia entre el valor pronosticado y el valor real de la variable dependiente. Los resultados

se interpretan de la siguiente manera:

d < 2 autocorrelación positiva d > 2 autocorrelación negativa

Se considera que hay independencia entre los residuos si el valor del Estadístico "d" está entre 1.5 y 2.5

Para la Polinomial el valor d calculado es de 2.76 lo que indica que hay una autocorrelación negativa entre los residuos, no son independientes.

Para la inversa y exponencial linealizada el cálculo nos da un valor d = 0.97, lo que significa que hay independencia entre los residuos.

3. HOMOCEDASTICIDAD: para cada valor de la variable independiente (mes) la varianza de los residuos es constante.
4. NORMALIDAD: para cada valor de la variable independiente,

REGRESIÓN NO LINEAL

los residuos se distribuyen normalmente con media cero.

En base a los gráficos de los residuos y de probabilidad normal que proporciona Excel se concluye que la Regresión Inversa y Exponencial linealizada cumple con los supuestos de homocedasticidad y normalidad

PASO 7. Verificar si la regresión proporciona valores lógicos en sus pronósticos para que se establezca como la mejor opción.

Calculando para los meses 25,26 y 27:

MES	POLINOMIAL	INV Y EXP
25	40,177	37,119
26	46,927	37,453
27	59,068	37,765

Tabla 6. Elaboración propia

Graficando los datos originales más los pronósticos de cada una de las opciones:

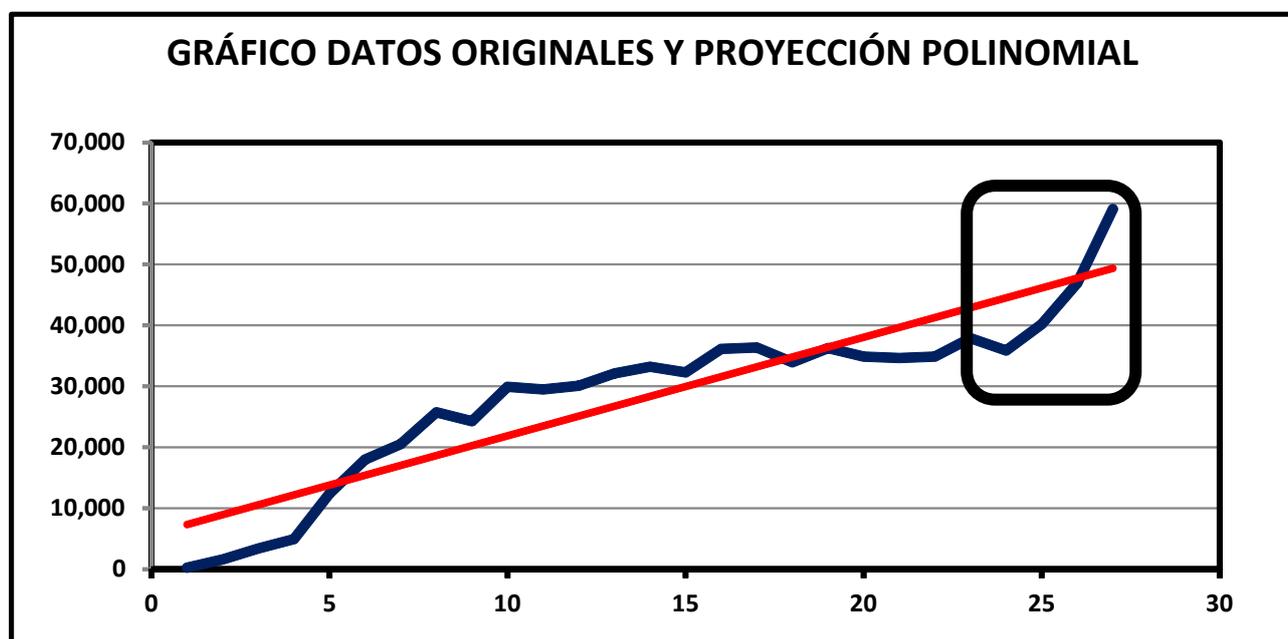


Gráfico 9. Elaboración Propia

El gráfico muestra que los pronósticos no son lógicos, no son congruentes con los meses previos.

REGRESIÓN NO LINEAL

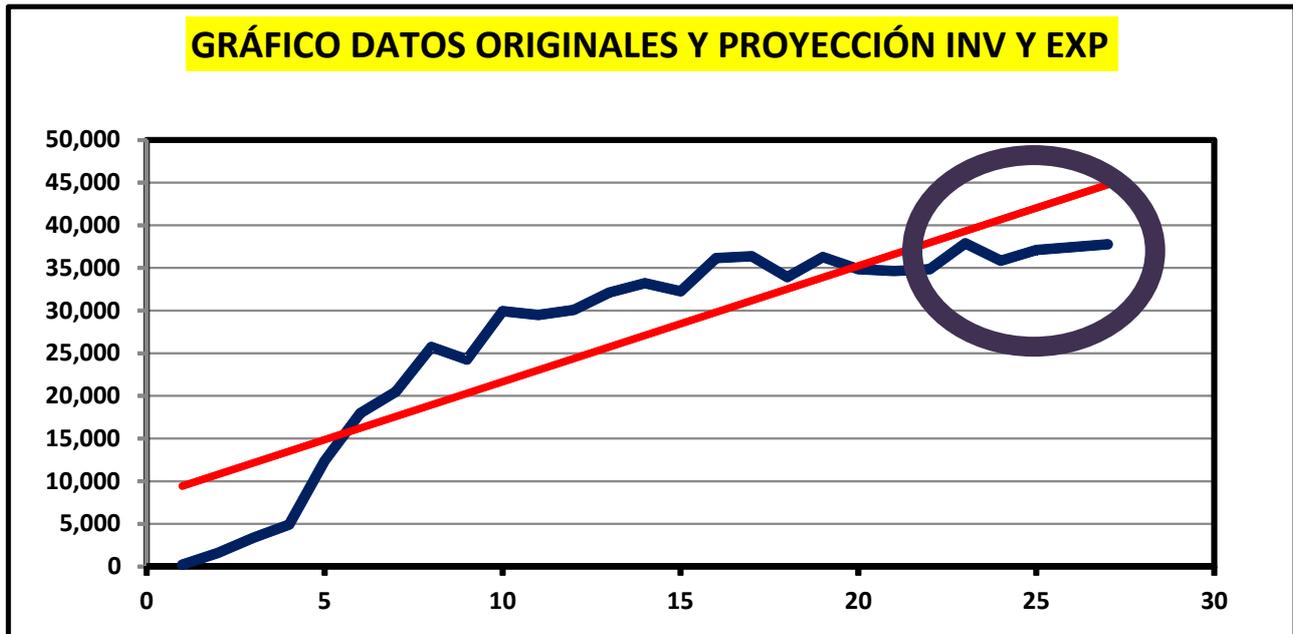


Gráfico 10. Elaboración Propia

El gráfico muestra que los pronósticos sí son lógicos, son congruentes con los meses previos.

La mejor opción es la INVERSA Y EXPONENCIAL ya que además de que la variable independiente explica en un alto grado a la variable dependiente ($R^2 = 95.45\%$), su versión linealizada cumple con los supuestos de la Regresión Lineal y además, posee una utilidad práctica de proporcionar pronósticos lógicos y congruentes con los datos originales.

El mejor pronóstico para las ventas de la abarrotería del mes 25 es de Q37,119 usando la REGRESIÓN INVERSA Y EXPONENCIAL.

Dado que en el Diagrama de Dispersión proporciona el valor más alto de R^2 para la opción Polinómica, una versión de la Regresión Múltiple, haremos un breve comentario. Esta opción debe de ser tomada con mucha precaución ya que en prácticamente todos los casos proporciona los valores más altos de R^2 en el Diagrama de Dispersión. Al correr la Regresión Múltiple, con frecuencia da valores no válidos de p en alguno de los coeficientes de la variable independiente. Lo más importante a considerar es que sus predicciones muchas veces son ilógicas.

REGRESIÓN NO LINEAL

CONCLUSIONES:

1. Cuando utilizamos modelos causa-efecto para pronosticar, muchas veces la Regresión Lineal es la mejor opción y su cálculo e interpretación son relativamente sencillos.

2. Un simple gráfico de los datos y la elaboración de un Diagrama de Dispersión en Excel nos confirmarán si efectivamente la relación es lineal. La gran ventaja del Diagrama de Dispersión es que proporciona la información del coeficiente de determinación, con lo cual tendremos una guía de las mejores opciones de solución no lineales.

3. En adición al Diagrama de Dispersión podemos utilizar gráficos auxiliares como el de la Inversa y Exponencial o el de la Parábola o la Hipérbola.

4. Al linealizar y correr la Regresión con Excel debemos verificar que dicha Regresión sea válida utilizando el valor p de probabilidad (p value), el cual debe de ser menor a 0.05 para un nivel de confianza del 95%.

5. También deben de cumplirse en las regresiones linealizadas los

supuestos de la Regresión Lineal: independencia de residuos, homocedasticidad y normalidad.

6. La mejor opción será aquella que cumpla con los requisitos anteriores y que proporcione pronósticos lógicos y útiles. La verificación se realiza pronosticando con valores muy cercanos a los datos originales, no se recomienda extrapolar con datos muy lejanos porque no hay seguridad que la relación entre las variables se mantenga fuera de esos rangos.

7. Debe tenerse en cuenta que todas las proyecciones siempre tendrán un error el cual ha sido minimizado al utilizar el método de Regresión.

8. Para aplicaciones que requieran mayor precisión, gráficas y otros informes puede optarse por adquirir software como SPSS, XLSTAT, EASY-FIT, etc.

BIBLIOGRAFÍA

1. Non Linear Regression, Baker. Recuperado de: <http://hspm.sph.sc.edu/Cours>

- es/J716/pdf/716-5%20Non-linear%20regression.pdf
2. Winston, Wayne, Investigación de Operaciones, Aplicaciones

REGRESIÓN NO LINEAL

- y Algoritmos, Cuarta Edición, Cengage Learning
3. Bates y Watts, *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Second Edition.
 4. Seber y Wild, *Nonlinear Regression*, Wiley online.
 5. *Análisis de Correlación y Regresión*, McGraw-Hill. Recuperado de: http://www.mcgraw-hill-educacion.com/pye01e/cap13/13 analisis_de_correlacion_y_regresion.pdf
 6. *Análisis de Regresión no lineal*, Manual de Estadística. Recuperado de: <http://www.uru.edu/fondoeditorial/libros/pdf/manualdestatistix/cap9.pdf>
 7. Gujarati, Porter (2010). *"Econometría"*, Editorial Mc Graw Hill. México. Quinta edición.
 8. Navidi (2006). *"Estadística para Ingenieros y Científicos"* Editorial Mc Graw Hill. México. Primera edición en español
 9. Lind, Marchal & Wathen (2005). *"Estadística Aplicada a los Negocios y a la Economía"* Décimo segunda edición. Editorial Mc Graw Hill. México.
 10. Miller-Freund-Johnson (1997) *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Editorial Prentice Hall. Cuarta edición.